http://www.therond.fr

Théorie de la crédibilité & systèmes bonus-malus

Pierre Thérond
pierre@therond.fr

Institut de Science Financière et d'Assurances - Université Lyon 1

Année universitaire 2025-2026

Plan du cours

1 Chapitre 1 - Introduction

2 Chapitre 2 - Prime de Bayes

3 Chapitre 3 - Estimateurs de crédibilité

4 Chapitre 4 - Modèle de Bühlmann-Straub

5 Chapitre 5 - Systèmes bonus-malus

Bibliographie principale

Bühlmann H., Gisler A. (2005) *A course in Credibility Theory and its Applications*, Springer.

Denuit M., Charpentier (2005) *Mathématiques de l'assurance non-vie*, volume II, Economica.

Herzog T.N. (1999) *Introduction to Credibility Theory*, ACTEX Publications.

Partrat Ch., Besson J.L. (2004) *Assurance non-vie*, Economica.

Philbrick S.W. (1981) An examination of credibility concepts, *Proceedings of the CAS*, vol. 68, 195-219.

Bibliographie complémentaire

Bühlmann H. (1967) Experience Rating and Credibility, *ASTIN Bulletin*, vol. 4, 199-207.

Bühlmann H., Straub E. (1970) Glaubwürdigkeit für Schadensätze, *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, vol. 70.

Cohen A., Dupin G., Levy C. (1986) Tarification de l'incendie des risques industriels français par la méthode de la crédibilité, *ASTIN Bulletin*, vol. 4.

Denuit M., Kaas R., Goovaerts M., J. Dhaene (2005) *Actuarial Theory for Dependent Risks : Measures, Orders and Models*, Wiley : New York.

Droesbeke J.J., Fine J., Saporta G. (éditeurs) (2002) *Méthodes bayesiennes en statistique*, Technip.

Gerber H. (1995) A teacher's remark on exact Credibility, *ASTIN Bulletin*, vol. 16.

Goulet V. (1998) Principles and application of credibility therory, *Journal of Actuarial Practice*, vol. 6.

Longley-Cook L.H. (1962) An Introduction to Credibility Theory, *Proceedings of the CAS*, vol. 49, 194-221.

Exercices

Des exercices figurent en fin de chaque chapitre.

Les étudiants sont néanmoins invités à consulter le recueil d'exercices de Vincent Goulet et Hélène Cossette dont le lien est disponible sur la page dédiée à ce cours :

http://www.therond.fr

Cossette, H. et Goulet, V., *Exercices en théorie de la crédibilité : Avec solutions*, 2e éd. révisée, Document libre publié sous contrat Creative Commons, 2008. ISBN 978-2-9809136-9-3

Sommaire

1 Chapitre 1 - Introduction

2 Chapitre 2 - Prime de Bayes

3 Chapitre 3 - Estimateurs de crédibilité

4 Chapitre 4 - Modèle de Bühlmann-Straub

5 Chapitre 5 - Systèmes bonus-malus

Exercices

Exercice 1.1 Considérons la situation où, si les montants de sinistres sont constants, le nombre de sinistres attendu pour pouvoir utiliser la crédibilité totale vaut 2 670. Quel est le nombre minimum de sinistres attendus pour pouvoir utiliser la crédibilité totale lorsque les montants de sinistres sont distribués selon une loi log-normale d'espérance 1 000 et de variance 1 500 000 ?

Exercice 1.2 Soit x le nombre de sinistres espérés pour pouvoir utiliser la crédibilité totale en acceptant une erreur de 5 % avec une probabilité de 90 %. Notons y la même grandeur pour une erreur acceptée de 10 %. Que vaut le rapport $\frac{x}{y}$?

Exercice 1.3 Montrer que l'on attend au moins 2 401 accidents par an pour pouvoir utiliser la crédibilité totale en acceptant une erreur de 4 % avec une probabilité de 95 %. En supposant que l'on dispose d'une exposition au risque de 40 000 véhicules par an et que la fréquence de sinistres moyenne est 0,0441, déterminer le niveau maximal du facteur de crédibilité.

Sommaire

1 Chapitre 1 - Introduction

2 Chapitre 2 - Prime de Bayes

3 Chapitre 3 - Estimateurs de crédibilité

4 Chapitre 4 - Modèle de Bühlmann-Straub

5 Chapitre 5 - Systèmes bonus-malus

Exercices

Exercice 2.1 Considérons un portefeuille regroupant exclusivement des "bons" et des "mauvais" risques. Notons B l'événement "être un bon risque" et B^c son complémentaire "être un mauvais risque". Supposons que l'assureur ne sache pas, *a priori* distinguer les bons des mauvais risques mais qu'il sait qu'ils sont en proportions égales dans son portefeuille ($\Pr[B] = 1/2$). Notons N_k le nombre de sinistres causés par un assuré au cours de l'année k et supposons que

$$\Pr[N_k = 1|B] = 0,2 = 1 - Pr[N_k = 0|B]$$
$$\Pr[N_k = 1|B^c] = 0,8 = 1 - Pr[N_k = 0|B^c]$$

Supposons enfin que les sinistres sont tous de même montant 1 et que conditionnellement à la qualité du risque, les nombres de sinistres sont indépendants.
1. Déterminez la prime pure *a priori* d'un assuré de ce portefeuille.
2. Considérons un assuré avec l'historique de sinistres : $(N_1 = 0, N_2 = 1, N_3 = 0)$. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un bon risque ?
3. Quelle prime exigeriez-vous de cet assuré pour la 4^e année ?

Exercices

Exercice 2.2 Considérons un assuré dont le nombre annuel de sinistres est distribué selon une loi de Poisson de paramètre Θ. Les montants de sinistres sont constants. La distribution *a priori* de Θ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
1. Donnez la prime de Bayes de cet assuré.
2. Lors de la première année d'observation, l'assuré a causé un sinistre. Quelle prime lui réclameriez-vous pour la seconde année ?

Exercice 2.3 Notons N_i le nombre de sinistres causés par un assuré durant l'année i. Conditionnellement à Θ, les N_i sont indépendants et identiquement distribués selon une loi de Poisson de paramètre Θ. Θ admet pour densité $g(\theta) = e^{-\theta}, \theta > 0$.
1. Donnez la probabilité que l'assuré cause 2 sinistres durant la pemière année $\Pr[N_1 = 2]$.
2. Donnez la distribution prédictive de N_2 sachant que $N_1 = 2$ (il s'agit de déterminer $\Pr[N_2 = n|N_1 = 2]$ pour $n = 0, 1, ...$)

Exercices

Exercice 2.4 Considérons un assuré qui

- a exactement un sinistre par an,
- dont le coût est distribuée selon une loi exponentielle de densité $f(x|T=t)=te^{-tx}, x>0$,
- où le paramètre T admet pour densité $h(t)=te^{-t}, t>0$.

1. Donnez la prime de Bayes de cet assuré pour la première période.
2. Sachant qu'il a eu un sinistre de montant 5 la première année, déterminez la densité *a posteriori* de T.

Exercice 2.5 La distribution *a priori* d'une v.a. H est donnée par $\Pr[H=0,25]=0,8$ et $\Pr[H=0,5]=0,2$. Conditionnellement à H les v.a. D_i sont i.i.d. Le résultat d'une expérience D_i est distribué selon

$$\Pr[D_i=d|H=h]=h^d(1-h)^{1-d},$$

pour $d\in\{0;1\}$.
1. Sachant $D_1=1$, exprimez la loi *a posteriori* de H.
2. Sachant $D_1=1$, quelle est la distribution prédictive du résultat de l'expérience D_2 ?

Sommaire

1 Chapitre 1 - Introduction

2 Chapitre 2 - Prime de Bayes

3 Chapitre 3 - Estimateurs de crédibilité

4 Chapitre 4 - Modèle de Bühlmann-Straub

5 Chapitre 5 - Systèmes bonus-malus

Exercices

Exercice 3.1 Considérons un assuré dont le nombre annuel de sinistres est distribué selon une loi de Poisson de paramètre Θ. La distribution *a priori* de Θ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
Lors de la première année d'observation, l'assuré a causé un sinistre. Utilisez le modèle de Bühlmann pour estimer le nombre de sinistres espéré que va engendrer cet assuré pour la deuxième année puis comparez le résultat avec celui obtenu dans l'exercice 2.2.

Exercice 3.2 Une société d'assurance couvre deux contrats depuis 3 ans. Elle dispose des montants annuels de sinistres suivants :

Contrat	Année 1	Année 2	Année 3
1	5	8	11
2	11	13	12

Selon le modèle de Bühlmann, quelles primes réclameriez-vous à ces deux assurés pour la 4^e année ?

Exercices

Exercice 3.3 Un portefeuille de 340 assurés a produit 210 déclarations de vol au cours d'une année. La répartition des sinistres est la suivante :

Nombre de sinistres	Nombre d'assurés
0	200
1	80
2	50
3	10

En supposant que le nombre de sinistres déclarés par un assuré suit une loi de Poisson dont le paramètre peut varier d'un assuré à l'autre, déterminez le facteur de crédibilité (selon le modèle de Bühlmann) pour un assuré de ce portefeuille. Déduisez-en l'augmentation de la prime d'un assuré qui aurait déclaré deux sinistres.

Exercice 3.4 Soit N_i le nombre de sinistres (de montant 1) causés par un assuré au cours de l'année i. Conditionnellement à $\Theta = \theta$, les N_i sont supposés indépendantes et distribuées selon une loi de Poisson de paramètre θ. Θ est supposé de loi gamma de moyenne a/τ et de variance a/τ^2.

1. Un assuré a produit n_1, n_2 et n_3 sinistres les trois premières années. Calculez sa prime de Bayes pour la quatrième année.

2. Comparez avec la prime qui lui serait réclamée selon le modèle de Bühlmann et commentez.

Sommaire

1 Chapitre 1 - Introduction

2 Chapitre 2 - Prime de Bayes

3 Chapitre 3 - Estimateurs de crédibilité

4 Chapitre 4 - Modèle de Bühlmann-Straub

5 Chapitre 5 - Systèmes bonus-malus

Exercices

Exercice 4.1 Utilisez le modèle de Bühlmann-Straub pour déterminer pour chaque groupe d'assurés la prime pour la 4^e année.
La sinistralité et les effectifs des trois premières années sont résumées ci-après.

	Montants de sinistres		
Groupe d'assurés	Année 1	Année 2	Année 3
1	8 000	11 000	15 000
2	20 000	24 000	18 000
3	10 000	15 000	13 500

	Taille des groupes			
Groupe d'assurés	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
1	40	50	75	75
2	100	120	120	95
3	50	60	60	60

Exercices

Exercice 4.2 Le tableau suivant reprend le nombre de sinistres causés par 300 assurés pendant la première année d'observation.

Nombre de sinistres	0	1	2	3	4	5
Nombre d'assurés	123	97	49	21	8	2

En supposant que le nombre de sinistres causés par un assuré est distribué selon une loi de Poisson dont la moyenne peut être différente selon les assurés, donnez, pour chaque assuré, une estimation de crédibilité du nombre de sinistres qu'il causera durant la prochaine année d'observation.

Exercices

Exercice 4.3 Considérer le tableau suivant où X_{ij} est le montant total de sinistres et ω_{ij} la masse salariale pour l'employeur i dans l'année j.

	X_{ij}			
Employeur i	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
1	14	21	12	18
2	4	0	4	6
3	3	0	1	6

	ω_{ij}			
Employeur i	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
1	2	3	4	3
2	4	2	1	2
3	3	3	1	3

A l'aide du modèle de Bühlmann-Straub, calculez la prime de crédibilité de l'employeur n° 1 pour la cinquième année sachant que $\omega_{1;5} = 3$.

Sommaire

1 Chapitre 1 - Introduction

2 Chapitre 2 - Prime de Bayes

3 Chapitre 3 - Estimateurs de crédibilité

4 Chapitre 4 - Modèle de Bühlmann-Straub

5 Chapitre 5 - Systèmes bonus-malus

Exercices

Cf. les annales