

# Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2017-2018 - Première session

15 janvier 2018 - Durée : 2 heures

Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

## Problème

Considérons un portefeuille d'assurance dont on modélise l'hétérogénéité (non observée *a priori* par l'assureur) par la variable aléatoire  $\Theta$ . Un assuré de profil de risque  $\theta \in [0, 1]$  produit un nombre de sinistres par an avec la distribution :

$$\Pr [N = k | \Theta = \theta] = \theta(1 - \theta)^k, k \in \mathbb{N}.$$

L'assureur estime que les profils de risque sont distribués selon une loi Bêta, i.e.

$$u(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1 - \theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, 0 < \theta < 1.$$

Le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres et l'espérance mathématique du coût d'un sinistre est normalisée à 1.

### Partie I

1. Quelle est la prime individuelle correcte d'un assuré de profil de risque  $\theta$  ?
2. Montrez que les familles de distribution géométrique et bêta sont conjuguées.
3. Déterminez la prime collective.

On se place à présent après  $n$  années d'observations  $(k_1, \dots, k_n)$ .

4. Déterminez la densité *a posteriori* de  $\Theta$ .
5. Calculez la prime de Bayes pour la  $(n + 1)$ -ème année.
6. Calculez la prime de Bühlmann  $(n + 1)$ -ème année.
7. Comparez les primes de Bayes et de Bühlmann et commentez.

## Partie II

L'assureur souhaite mettre en place une échelle bonus-malus à trois degrés (numérotés 1 à 3) avec le fonctionnement suivant :

- une année sans sinistre fait descendre d'un degré dans l'échelle,
- les assurés ayant causé au moins un sinistre au cours de l'année remontent au degré 3 de l'échelle.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours d'un assuré de profil de risque  $\theta$  dans l'échelle.
2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne.
3. Quel est son temps d'atteinte ?
4. Donnez la distribution stationnaire du portefeuille.
5. Quelles primes relatives proposeriez-vous d'associer aux trois degrés de l'échelle ?

### Exercice

Une société d'assurance couvre deux contrats depuis 3 ans. Elle dispose des montants annuels de sinistres suivants :

| Contrat | Année 1 | Année 2 | Année 3 |
|---------|---------|---------|---------|
| 1       | 5       | 8       | 11      |
| 2       | 11      | 13      | 12      |

Selon le modèle de Bühlmann, quelles primes réclameriez-vous à ces deux assurés pour la 4<sup>e</sup> année ?

### Annexe : Fonctions Bêta et Gamma

On rappelle les définitions des fonctions Bêta et Gamma :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

et la propriété :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$