

Assurance non-vie - Théorie de la crédibilité

Année universitaire 2006-2007 - Première session

23 avril 2007 - Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.

Exercice n°1

Le tableau suivant reprend le nombre de sinistres causés par 300 assurés pendant la première année d'observation.

Nombre de sinistres	0	1	2	3	4	5
Nombre d'assurés	123	97	49	21	8	2

En supposant que le nombre de sinistres causés par un assuré est distribué selon une loi de Poisson (conditionnelle) dont la moyenne peut être différente selon les assurés, donnez, pour chaque assuré, une estimation de crédibilité du nombre de sinistres qu'il causera durant la prochaine année d'observation.

Exercice n°2

Considérons la famille des distributions géométriques

$$\mathcal{F} = \{f_{\theta}(x) = (1 - \theta)^x \theta, x \in \mathbf{N}; \theta \in [0; 1]\}.$$

Trouvez la famille \mathcal{U} conjuguée à \mathcal{F} .

Exercice n°3

Un actuair e doit tarifier un trait e de r eassurance en exc e dent de sinistre. Des e tudes statistiques l'ont conduit e mod eliser le co t des sinistres de montant sup e rieur e x_0 par des variables al eatoires de type Pareto

$$F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0.$$

1. En vous fondant sur l' e tude du co t moyen par sinistre e la charge du r eassureur en fonction du niveau de la priorit e, expliquez l' int e r e t d' une telle mod elisation dans ce contexte.
2. Donnez l' estimateur du maximum de vraisemblance du param e tre θ .
3. Montrez que la famille des distributions Gamma est conjugu e e la famille des distributions Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 ; \theta > 0 \right\}.$$

Dans la suite, on se place dans le mod e le Pareto-Gamma.

4. *A priori* $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$, quelle est la valeur esp e r e e du param e tre si l' on ne dispose pas d' observation ?
5. Pour un contrat particulier, on a observ e durant la premi e re p e r iode un echantillon de n sinistres d e passant le montant x_0 . Donnez l' estimateur bayesien de Θ pour ce contrat. Exprimez-le en fonction de l' e. m. v (lorsque l' on ne dispose pas d' information *a priori*) et de l' estimation *a priori* (lorsque l' on ne dispose pas d' observations). Commentez.

Quelques rappels :

- La famille \mathcal{U} est conjugu e e la famille \mathcal{F} si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour toute r ealisation \mathbf{x} du vecteur des observations \mathbf{X} , il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que $U_\gamma(\theta | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = U_{\gamma'}(\theta)$, pour tout $\theta \in \Theta$.
- Une variable al eatoire distribu e selon une loi Gamma de param e tre (γ, β) a pour densit e $u(\theta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \theta^{\gamma-1} \exp(-\beta\theta)$.