

Ambiguïté et impact sur les prises de décisions en univers incertain

Christian Y. ROBERT & Pierre E. THEROND*

ISFA - Université Lyon 1 - GALEA & Associés*

Séminaire technique du 22 mai - Chaire Management de la modélisation

CARDIF

1 Introduction

Dans cette présentation, nous allons :

- ▷ dans un premier temps, analyser et commenter les résultats du sondage que nous vous avons soumis afin de comprendre les comportements de décision en univers incertain,
- ▷ dans un second temps, présenter les principaux résultats de l'article "Distortion risk measures, ambiguity aversion and optimal effort" paru dans ASTIN Bulletin (2014).

La quasi-totalité des modèles sur les mesures de risques supposent que les distributions des risques sont parfaitement connues et ne s'intéressent pas aux conséquences de la méconnaissance de la distribution sur les prises de décisions à l'aide des mesures de risques.

Nous allons supposer dans notre travail que le paramètre de la distribution du risque est inconnu et voir comment cette incertitude modifie les choix lorsque les individus sont averses à l'ambiguïté et doivent réduire leur risque.

2 Décisions en univers incertain : théories et expériences

- Le paradoxe de Saint Petersburg
- La théorie de l'utilité espérée et ses axiomes
- Le paradoxe d'Allais
- La théorie duale de Yaari
- La théorie des perspectives
- La théorie subjective de Savage
- Le paradoxe d'Ellsberg et la notion d'ambiguïté

Le sondage :

- Problèmes de choix : 12
- Nombres de personnes qui ont répondu au questionnaire : 165
- 6 groupes de personnes sondées : 3 groupes d'élèves, 1 groupe d'enseignants-chercheurs, 2 groupes de professionnels : (tailles des groupes : de 14 personnes à 54 personnes)
- Nombres de personnes "familières" avec la théorie des choix en incertain : 98

Problème 1 :

On vous propose de jouer à la loterie suivante (une fois) :

- Vous recevez 100 euros avec une probabilité de $1/2$
- Vous ne recevez rien avec une probabilité de $1/2$

Q : Quel prix êtes vous prêt à payer au plus pour participer à cette loterie ?

- moins de 10 euros
- entre 10 et 20 euros
- entre 20 et 30 euros
- entre 30 et 40 euros
- entre 40 et 50 euros
- plus de 50 euros

Problème 2 :

Soit le jeu de pile ou face suivant : un joueur (vous) et une banque.

- Le joueur parie une mise initiale.
- La banque encaisse la mise du joueur.
- On lance une pièce de monnaie.

Si face apparaît, la banque paie 1 euro au joueur, et on arrête le jeu. Sinon, on relance la pièce.

Si face apparaît, la banque paie 2 euros, et on arrête le jeu. Sinon, on relance la pièce. Si face apparaît, la banque paie 4 euros au joueur, et ainsi de suite.

Donc, si face apparaît pour la première fois au n -ième lancer, la banque paie 2^{n-1} euros au joueur (1 2 4 8 16 32 64 128 ...).

Q : Quelle mise initiale êtes-vous prêt à payer au plus pour participer à ce jeu ?

- moins de 1 euro
- entre 1 et 2 euros
- entre 2 et 3 euros
- entre 3 et 6 euros
- entre 6 et 12 euros
- entre 12 et 100 euros
- plus de 100 euros
- toute votre richesse

Le paradoxe de Saint-Petersbourg

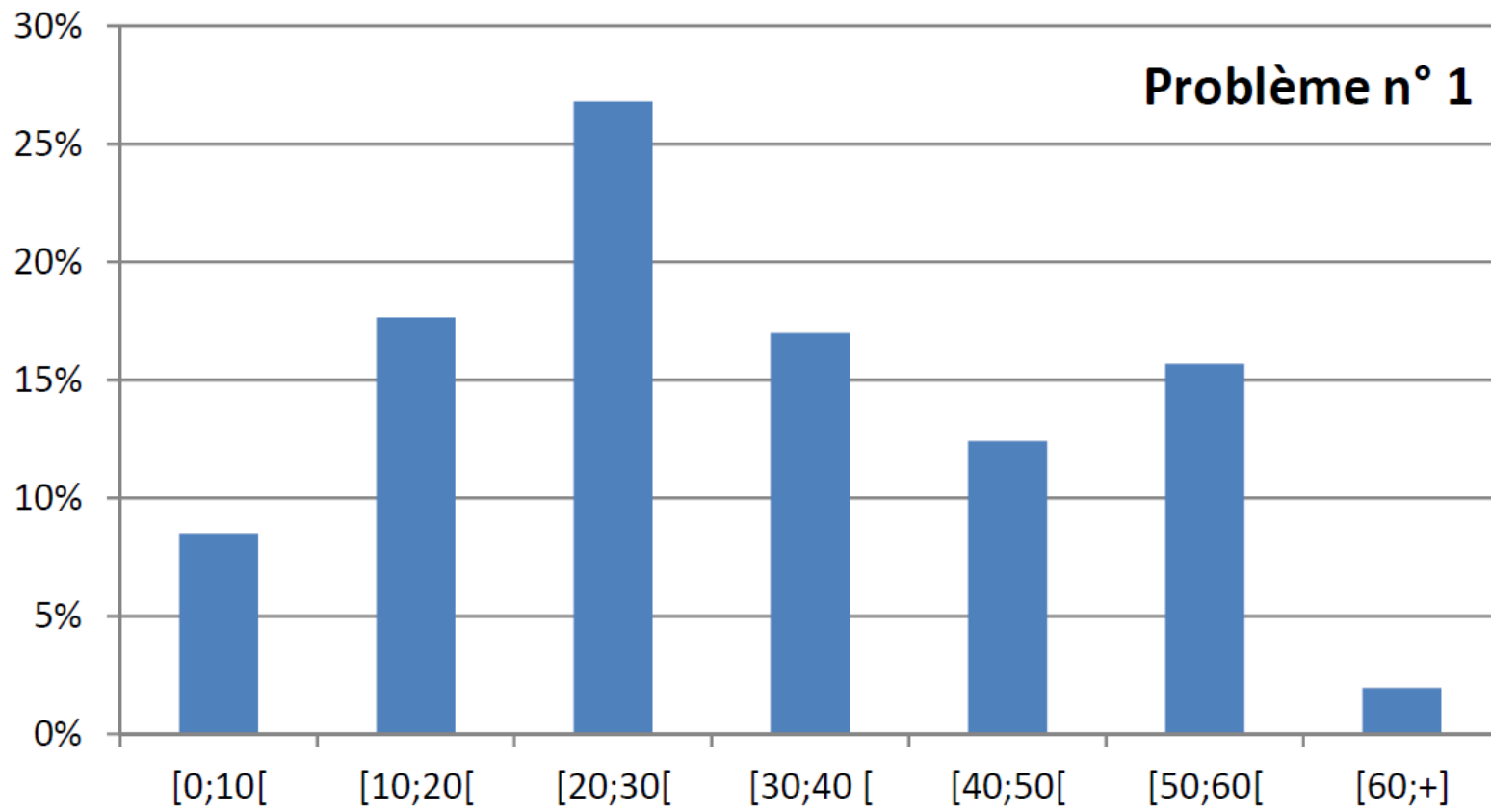
○ Dans le premier jeu : Espérance de gain = 50

⇒ Les joueurs proposent pour une très grande majorité d'entre eux un prix inférieur à l'espérance de gain.

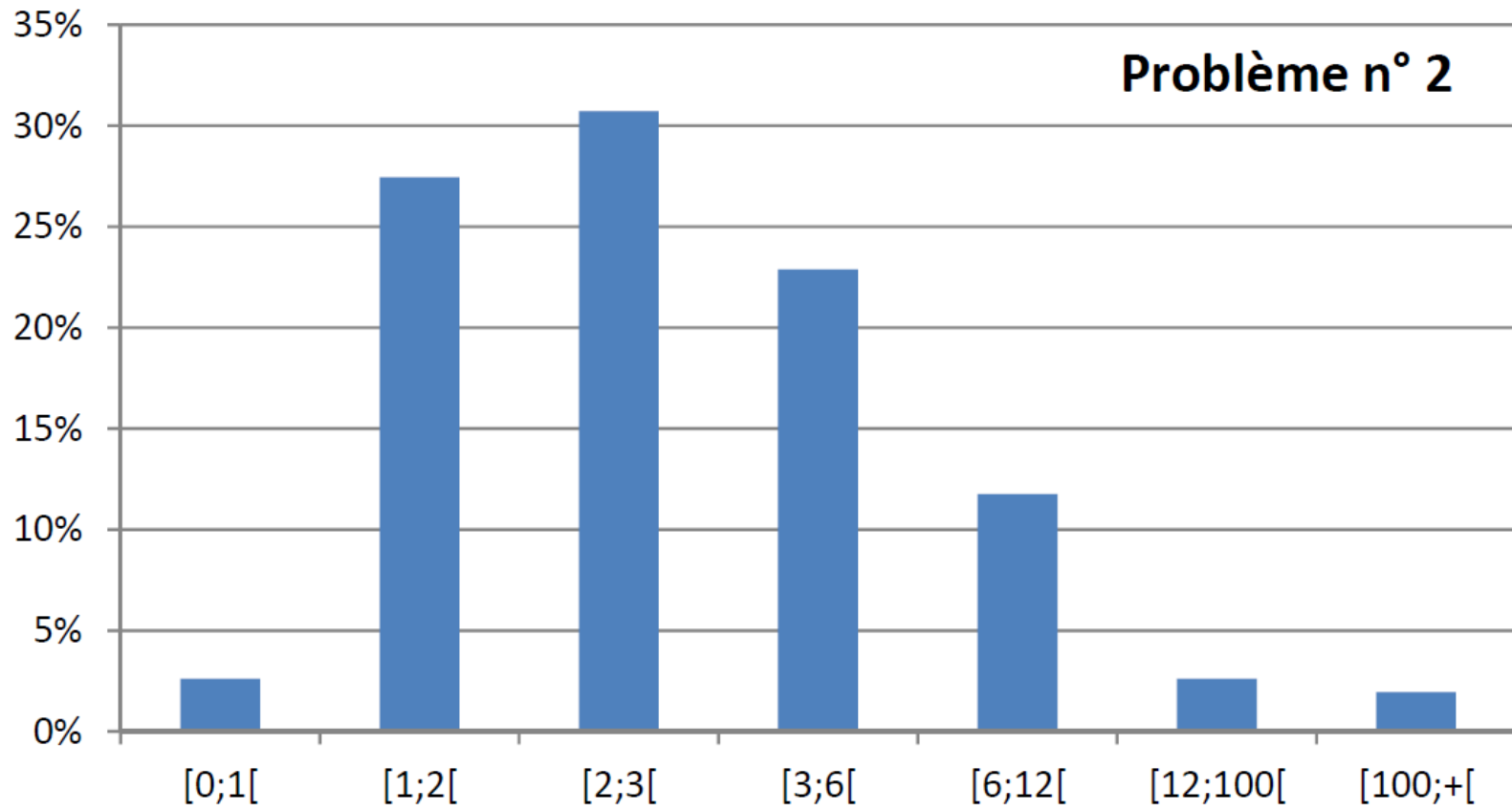
○ Dans le second jeu :

$$\text{Espérance de gain} = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \dots = \infty$$

⇒ Les joueurs proposent systématiquement un prix inférieur à l'espérance de gain !



Jeu 1



Jeu 2

Le paradoxe de Saint-Pétersbourg est le nom donné au second jeu :

- Pourquoi, alors que mathématiquement l'espérance de gain est infinie à un jeu, les joueurs refusent-ils de jouer tout leur argent ?

- Ce "paradoxe" a été énoncé en 1713 par Nicolas Bernoulli. Il s'agit d'un paradoxe du comportement des êtres humains face aux événements d'une variable aléatoire d'après lui.

- Ce paradoxe fut publié par Daniel Bernoulli (frère), "Specimen theoriae novae de mensura sortis" dans les Transactions de l'Académie de Saint-Petersbourg.

- Pour expliquer ce paradoxe, ils introduisent avec Gabriel Cramer une fonction d'utilité marginale. Cependant ces deux auteurs divergent sur la fonction d'utilité : logarithme naturel pour Bernoulli et racine carrée pour Cramer.

2.1 Théorie de l'espérance d'utilité

Considérons deux richesses aléatoires possibles R_1 et R_2 .

Un agent économique doit choisir entre ces deux richesses.

Il ne base pas sa décision sur une simple comparaison des richesses espérées car la richesse ne correspond pas à son bien être.

L'agent base ses préférences sur l'hypothèse d'espérance d'utilité s'il existe une fonction u , appelée fonction d'utilité, telle que R_1 est préférée à R_2 , ssi

$$\mathbb{E}[u(R_1)] \geq \mathbb{E}[u(R_2)].$$

Son critère de choix est donc une maximisation de l'espérance d'utilité.

On dit qu'un agent est averse au risque s'il préfère toujours une situation avec une richesse certaine à une situation avec une richesse aléatoire de même espérance.

Soit

$$R_1 = px + (1 - p)y, \quad R_2 = \begin{cases} x & \text{avec probabilité } p \\ y & \text{avec probabilité } 1 - p \end{cases},$$

alors

$$\mathbb{E}[u(R_1)] \geq \mathbb{E}[u(R_2)] \Leftrightarrow u(px + (1 - p)y) \geq pu(x) + (1 - p)u(y)$$

ce qui signifie que u est concave.

On dit qu'un agent est neutre au risque s'il est indifférent entre une situation avec une richesse certaine et une situation avec une richesse aléatoire de même espérance ($u(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0$).

AXIOMES SOUS JACENTS A LA THEORIE DE L'ESPERANCE D'UTILITE :

○ AXIOME EU1 : Si R_1 et R_2 sont deux richesses aléatoires possibles de même distribution, alors l'agent économique considère les deux richesses comme équivalentes.

Cela signifie que l'agent économique prend seulement en considération la distribution de la variable de richesse et n'est pas influencé par d'autres aspects de l'état du monde.

○ AXIOME EU2 : Les préférences de l'agent génèrent une relation de préordre complète, c'est-à-dire, la relation est reflexive, transitive et permet de comparer tous les couples de richesses.

○ AXIOME EU3 : Les préférences sont continues par rapport à la distance de Wasserstein d_W

$$d_W(R_1, R_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |F_{R_1}(t) - F_{R_2}(t)| dt.$$

Si R_1, \tilde{R}_1, R_2 et \tilde{R}_2 sont quatre richesses aléatoires telles que R_1 est préférée à R_2 et si il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\max \left\{ d_W(R_1, \tilde{R}_1), d_W(R_2, \tilde{R}_2) \right\} < \epsilon$$

alors \tilde{R}_1 est préférée à \tilde{R}_2 .

Cet axiome dit que si R_1 est préférée à R_2 et que le même ordre est vérifié pour \tilde{R}_1 et \tilde{R}_2 qui sont suffisamment proches de R_1 et R_2 , alors \tilde{R}_1 est aussi préférée à \tilde{R}_2 .

○ AXIOME EU4 : Si $F_{R_1}(t) \leq F_{R_2}(t) \forall t$, alors R_1 est préférée à R_2 .

○ AXIOME EU5 : Supposons que R_1 est préférée à R_2 . Soient

$$\tilde{R}_1 = \begin{cases} R_1 & \text{avec probabilité } p \\ S & \text{avec probabilité } 1 - p \end{cases} \quad \tilde{R}_2 = \begin{cases} R_2 & \text{avec probabilité } p \\ S & \text{avec probabilité } 1 - p \end{cases}$$

où S est une richesse indépendante de R_1 et R_2 , alors \tilde{R}_1 est aussi préférée à \tilde{R}_2 pour n'importe quel $p \in [0, 1]$.

Une décision n'est pas influencée par l'introduction d'une troisième richesse avec une probabilité fixée.

DEFINITION D'UNE MESURE DE RISQUE ASSOCIEE :

Considérons une compagnie d'assurance avec une richesse initiale R et une fonction d'utilité u croissante et concave.

La compagnie assure le risque X au prix $\Pi(X)$ si il est solution de l'équation suivante

$$\mathbb{E}[u(R - X + \Pi(X))] = u(R).$$

Il s'agit du prix où l'assureur est indifférent entre souscrire le risque ou ne pas le souscrire.

Lorsque $R = 0$, on parle du principe de l'utilité nulle.

Problème 3 :

On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous recevez 5 millions d'euros avec une probabilité de 0,10
- Vous recevez 1 million d'euros avec une probabilité de 0,89
- Vous ne recevez rien avec une probabilité de 0,01

Loterie B :

- Vous recevez 1 million d'euros avec une probabilité de 1

Laquelle choisissez-vous ?

Problème 4 :

On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous recevez 1 million d'euros avec une probabilité de 0,11
- Vous ne recevez rien avec une probabilité de 0,89

Loterie B :

- Vous recevez 5 millions euros avec une probabilité de 0,10
- Vous ne recevez rien avec une probabilité de 0,90

Laquelle choisissez-vous ?

Le paradoxe d'Allais (1)

Supposons que le joueur maximise l'espérance d'utilité de sa richesse. S'il préfère 3B à 3A, alors

$$u(1) > 0,1 \times u(5) + 0,89 \times u(1) + 0,01 \times u(0).$$

S'il préfère 4B à 4A, alors

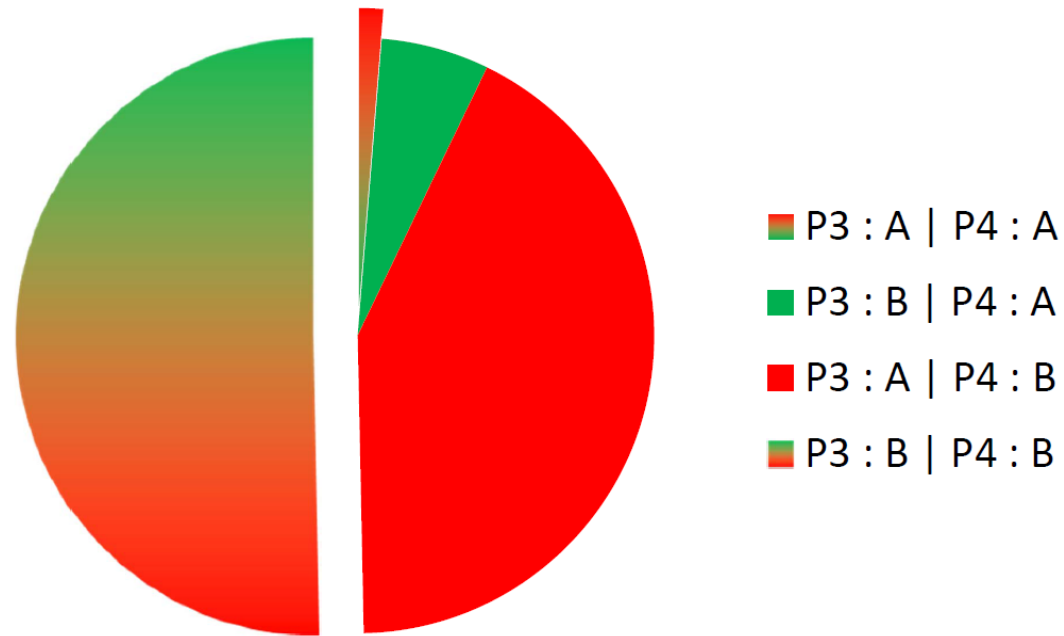
$$0,1 \times u(5) + 0,9 \times u(0) > 0,11 \times u(1) + 0,89 \times u(0)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} 0,1 \times u(5) + 0,01 \times u(0) &> 0,11 \times u(1) \\ 0,1 \times u(5) + 0,89 \times u(1) + 0,01 \times u(0) &> u(1). \end{aligned}$$

D'où la contradiction.

Problèmes n° 3 et 4



- Vert : choix cohérents avec une fonction d'utilité aversive au risque
- Rouge : choix cohérents avec le critère de l'espérance de gains
- Dégradé vert/rouge : choix incohérents avec le principe de l'espérance d'utilité

Problème 5 :

On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous recevez 5 millions d'euros avec une probabilité de 0,98
- Vous ne recevez rien avec une probabilité de 0,02

Loterie B :

- Vous recevez 1 million d'euros avec une probabilité de 1

Laquelle choisissez-vous ?

- A
- B

Problème 6 :

On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous recevez 5 millions d'euros avec une probabilité de 0,0098
- Vous recevez 1 million d'euros avec une probabilité de 0,99
- Vous ne recevez rien avec une probabilité de 0,0002

Loterie B :

- Vous recevez 1 million d'euros avec une probabilité de 0,01
- Vous recevez 1 euro avec une probabilité de 0,99

Laquelle choisissez-vous ?

- A
- B

Le paradoxe d'Allais (2)

Soit C la loterie :

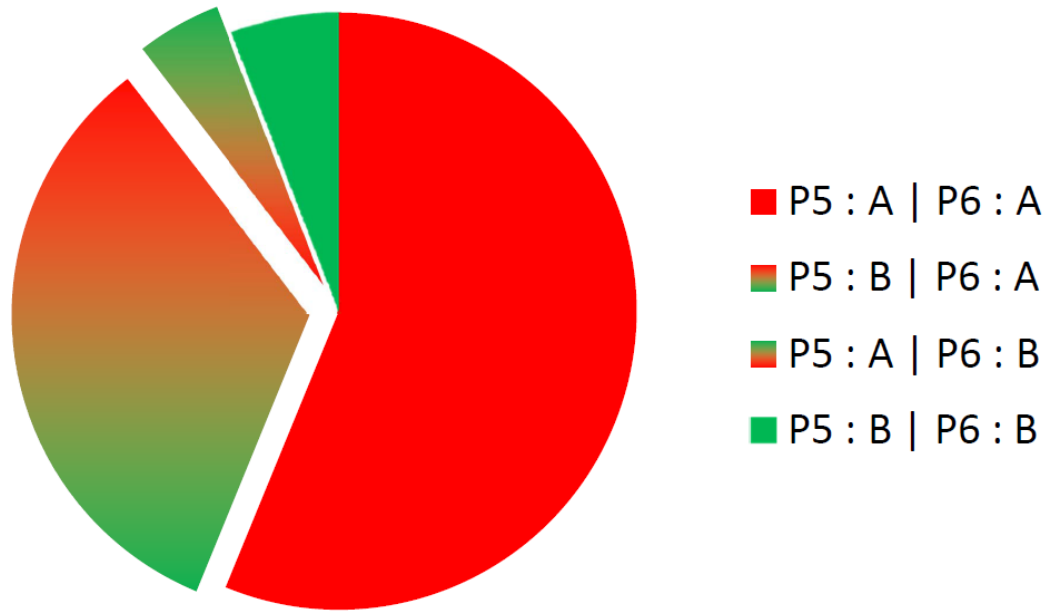
- Vous ne recevez rien avec une probabilité de 0,01
- Vous recevez 1 euro avec une probabilité de 0,99

On peut montrer que :

- La loterie 6A correspond à jouer à la loterie 5A avec une probabilité de 0,01 et à la loterie C avec une probabilité de 0,99
- La loterie 6B correspond à jouer à la loterie 5B avec une probabilité de 0,01 et à la loterie C avec une probabilité de 0,99

Par conséquent, si un joueur préfère 5B à 5A, il doit préférer 6B à 6A par l'axiome d'indépendance (et réciproquement).

Problèmes n° 5 et 6



- Vert : choix cohérents avec une fonction d'utilité aversive au risque
- Rouge : choix cohérents avec le critère de l'espérance de gains
- Dégradé vert/rouge : choix incohérents avec le principe de l'espérance d'utilité

Présentation généralisée des loteries du paradoxe d'Allais :

On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous recevez a euros avec une probabilité de λp
- Vous recevez d euros avec une probabilité de $p(1 - \lambda - \alpha) + \alpha$
- Vous recevez c euros sinon

Loterie B :

- Vous recevez b euros avec une probabilité de p
- Vous recevez d euros avec une probabilité de $\alpha(1 - p)$
- Vous recevez c euros sinon

avec $a > b > d$ et $c \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 < \lambda < 1$.

Laquelle choisissez-vous ?

- A

- B

A est préférée à B si et seulement si

$$\lambda u(a) + (1 - \lambda)u(d) > u(b).$$

Ce choix est indépendant de α , p et c .

2.2 Théorie de l'espérance déformée

Considérons deux richesses aléatoires possibles R_1 et R_2 . Un agent économique doit choisir entre ces deux richesses. Il ne base pas sa décision sur une simple comparaison des richesses espérées car la richesse ne correspond pas à son bien être.

L'agent base ses préférences sur l'hypothèse de l'espérance déformée s'il existe une fonction g non décroissante telle $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, appelée fonction de déformation, telle que R_1 est préférée à R_2 ssi $\mathbb{H}_g[R_1] \geq \mathbb{H}_g[R_2]$ où

$$\mathbb{H}_g[R_1] = - \int_{-\infty}^0 \left(1 - g(\bar{F}_{R_1}(r))\right) dr + \int_0^{\infty} g(\bar{F}_{R_1}(r)) dr.$$

On rappelle que

$$\mathbb{E}[R_1] = - \int_{-\infty}^0 \left(1 - \bar{F}_{R_1}(r)\right) dr + \int_0^{\infty} \bar{F}_{R_1}(r) dr.$$

Son critère de choix est donc une maximisation d'une espérance déformée.

On dit qu'un agent est averse au risque s'il préfère toujours une situation avec une richesse certaine à une situation avec une richesse aléatoire de même espérance.

Soit $x > 0$

$$R_1 = px, \quad R_2 = \begin{cases} x & \text{avec probabilité } p \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - p \end{cases}$$

alors

$$\mathbb{H}_g[R_1] \geq \mathbb{H}_g[R_2] \iff px \geq g(p)x \iff p \geq g(p).$$

En particulier si g est convexe alors l'agent est averse au risque.

On dit qu'un agent est neutre au risque s'il est indifférent entre une situation avec une richesse certaine et une situation avec une richesse aléatoire de même espérance ($g(p) = p$).

AXIOMES SOUS JACENTS A LA THEORIE DE L'ESPERANCE DEFORMEE :

○ AXIOMES ED1-4 = AXIOMES EU1-4.

○ AXIOME ED5 : Supposons que R_1 est préférée à R_2 . Soient \tilde{R}_1 et \tilde{R}_2 définies par

$$\bar{F}_{\tilde{R}_1}^{-1} = p\bar{F}_{R_1}^{-1} + (1-p)\bar{F}_S^{-1} \quad \bar{F}_{\tilde{R}_2}^{-1} = p\bar{F}_{R_2}^{-1} + (1-p)\bar{F}_S^{-1}$$

où S est une autre richesse, alors \tilde{R}_1 est aussi préférée à \tilde{R}_2 pour n'importe quel $p \in [0, 1]$.

Rappelons que pour, l'AXIOME EU5, \tilde{R}_1 et \tilde{R}_2 sont définies par

$$\bar{F}_{\tilde{R}_1} = p\bar{F}_{R_1} + (1-p)\bar{F}_S \quad \bar{F}_{\tilde{R}_2} = p\bar{F}_{R_2} + (1-p)\bar{F}_S.$$

La comparaison pour l'espérance déformée effectue des comparaisons sur des combinaisons convexes des richesses au lieu d'effectuer des comparaisons sur des combinaisons convexes des probabilités pour l'espérance d'utilité.

COMPARAISON AVEC LA THEORIE DE L'ESPERANCE D'UTILITE :

Soit R une richesse positive. Dans la théorie de l'espérance d'utilité, le critère est :

$$\mathbb{E}[u(R)] = \int_0^1 u(VaR[R; \alpha]) d\alpha$$

alors que, dans la théorie de l'espérance déformée, le critère est

$$\mathbb{H}_g[R] = \int_0^1 VaR[R; 1 - \alpha] dg(\alpha) = \int_0^1 VaR[R; \alpha] dg(1 - \alpha).$$

Ces deux équations illustrent les différences fondamentales entre les deux approches : dans l'approche par espérance d'utilité, les valeurs possibles de la richesse $VaR[R; \alpha]$ sont ajustées par la fonction d'utilité, alors que, dans l'approche par espérance déformée, c'est la queue de distribution qui est ajustée.

En d'autres termes, les fonctions de déformations modifient les probabilités et gardent les niveaux de richesse, alors que les fonctions d'utilité modifient les niveaux de richesse et gardent les probabilités.

DEFINITION MESURES DE WANG :

Considérons une compagnie d'assurance avec une richesse initiale R et une fonction de déformation g convexe.

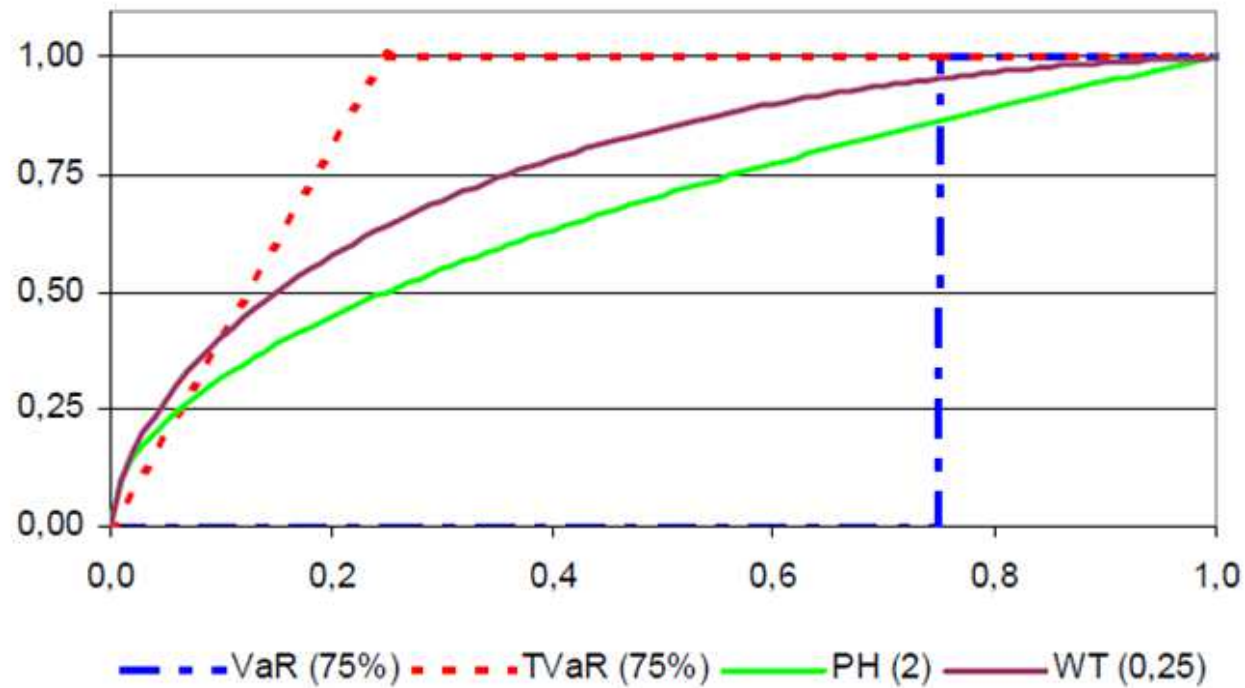
La compagnie assure le risque X au prix $\Pi(X)$ s'il est solution de l'équation suivante

$$\mathbb{H}_g[R - X + \Pi(X)] = \mathbb{H}_g[R].$$

Il s'agit du prix où l'assureur est indifférent entre souscrire le risque ou ne pas le souscrire. Ceci est équivalent à

$$\Pi(X) = \mathbb{H}_{\bar{g}}[X] = \int_0^1 VaR[R; \alpha] d\bar{g}(1 - \alpha) = \int_0^1 VaR[R; \alpha] dg(\alpha)$$

où $\bar{g}(\alpha) = 1 - g(1 - \alpha)$ est une fonction de déformation concave.



Différentes fonctions \bar{g}

Proportional Hazard : \bar{g} est définie par $\bar{g}(p) = p^{1/\xi}$, $\xi \geq 1$.

Wang transform : \bar{g} est définie par $\bar{g}(p) = \Phi(\Phi^{-1}(p) + \gamma)$, $\gamma \geq 0$, où Φ est la fonction de distribution de la loi normale centrée et réduite.

2.3 La théorie des perspectives

Problème 7 :

On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous êtes sûr d'obtenir 900 euros

Loterie B :

- Vous recevez 1000 euros avec une probabilité de 0,90
- Vous ne recevez rien avec une probabilité de 0,10

Laquelle choisissez-vous ?

- A
- B

Problème 8 :

On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous êtes sûr de perdre 900 euros

Loterie B :

- Vous perdez 1000 euros avec une probabilité de 0,90
- Vous ne perdez rien avec une probabilité de 0,10

Laquelle choisissez-vous ?

- A
- B

Problème 9 :

Outre ce que vous possédez déjà, on vous donne 1000 euros. On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous êtes sûr d'obtenir 500 euros

Loterie B :

- Vous recevez 1000 euros avec une probabilité de 0,50
- Vous ne recevez rien avec une probabilité de 0,50

Laquelle choisissez-vous ?

- A
- B

Problème 10 :

Outre ce que vous possédez déjà, on vous donne 2000 euros. On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous êtes sûr de perdre 500 euros

Loterie B :

- Vous perdez 1000 euros avec une probabilité de 0,50
- Vous ne perdez rien avec une probabilité de 0,50

Laquelle choisissez-vous ?

- A
- B

Interprétations :

- Problème 7 (cas de gains) : aversion au risque, la majorité des personnes choisissent la loterie A (env. 90%).
- Problème 8 (cas de pertes) : recherche du risque, la majorité des personnes choisissent la loterie B (env. 90%).

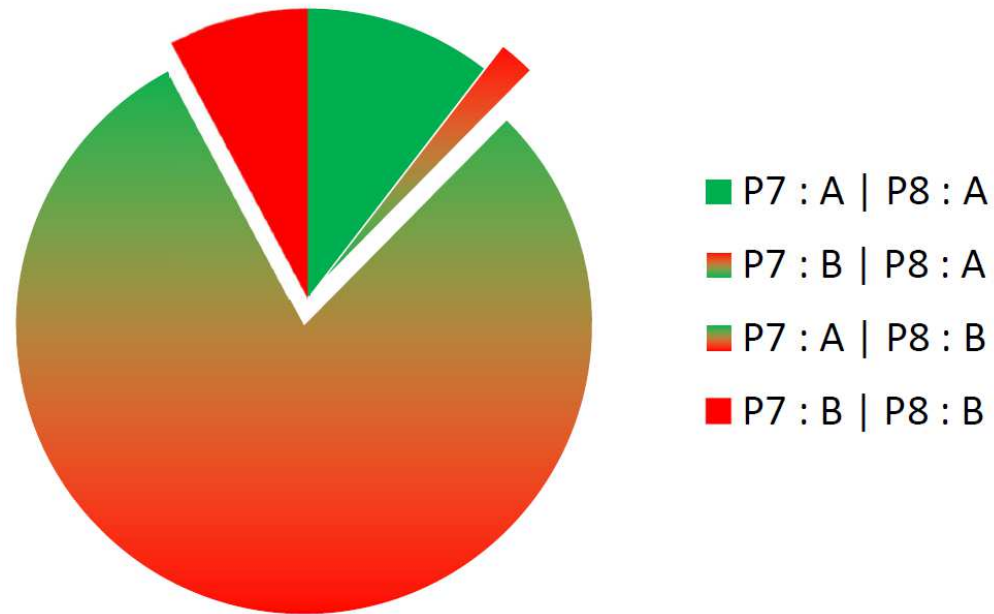
Il faut modéliser des attitudes différentes vis-à-vis du risque pour les gains et pour les pertes.

Les problèmes 9 et 10 sont identiques en termes de niveau de richesses et de probabilités associées.

- Problème 9 (présentation en gains) : la majorité des personnes choisissent la loterie A (env. 75%).
- Problème 10 (présentation en pertes) : la majorité des personnes choisissent la loterie B (env. 55%).

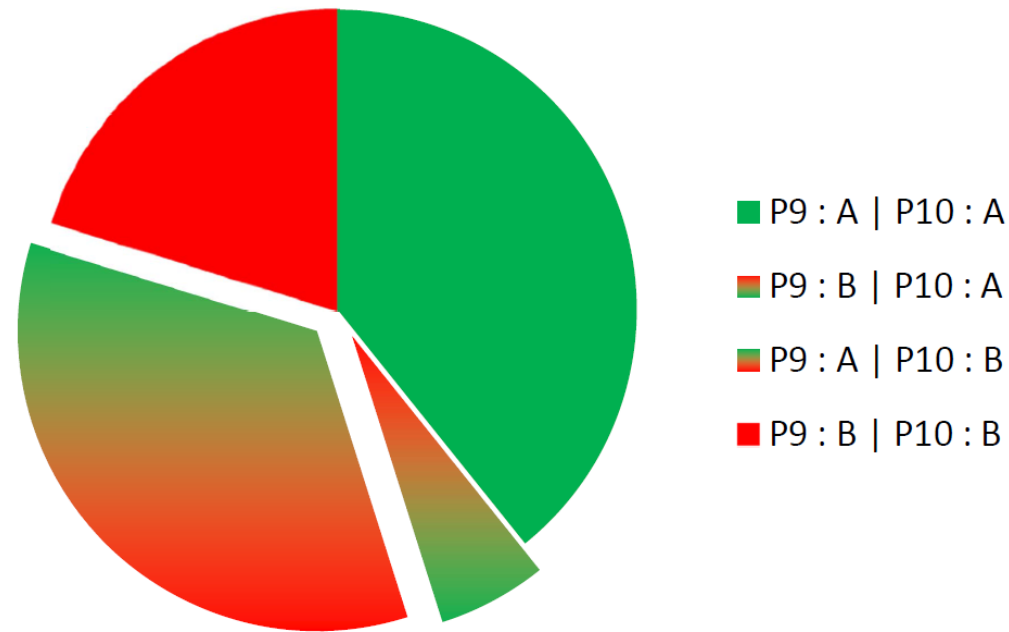
Ces expériences mettent en évidence que l'attitude vis-à-vis du risque dépend du fait qu'il y ait des pertes ou des gains et du niveau de richesse initiale.

Problèmes n° 7 et 8

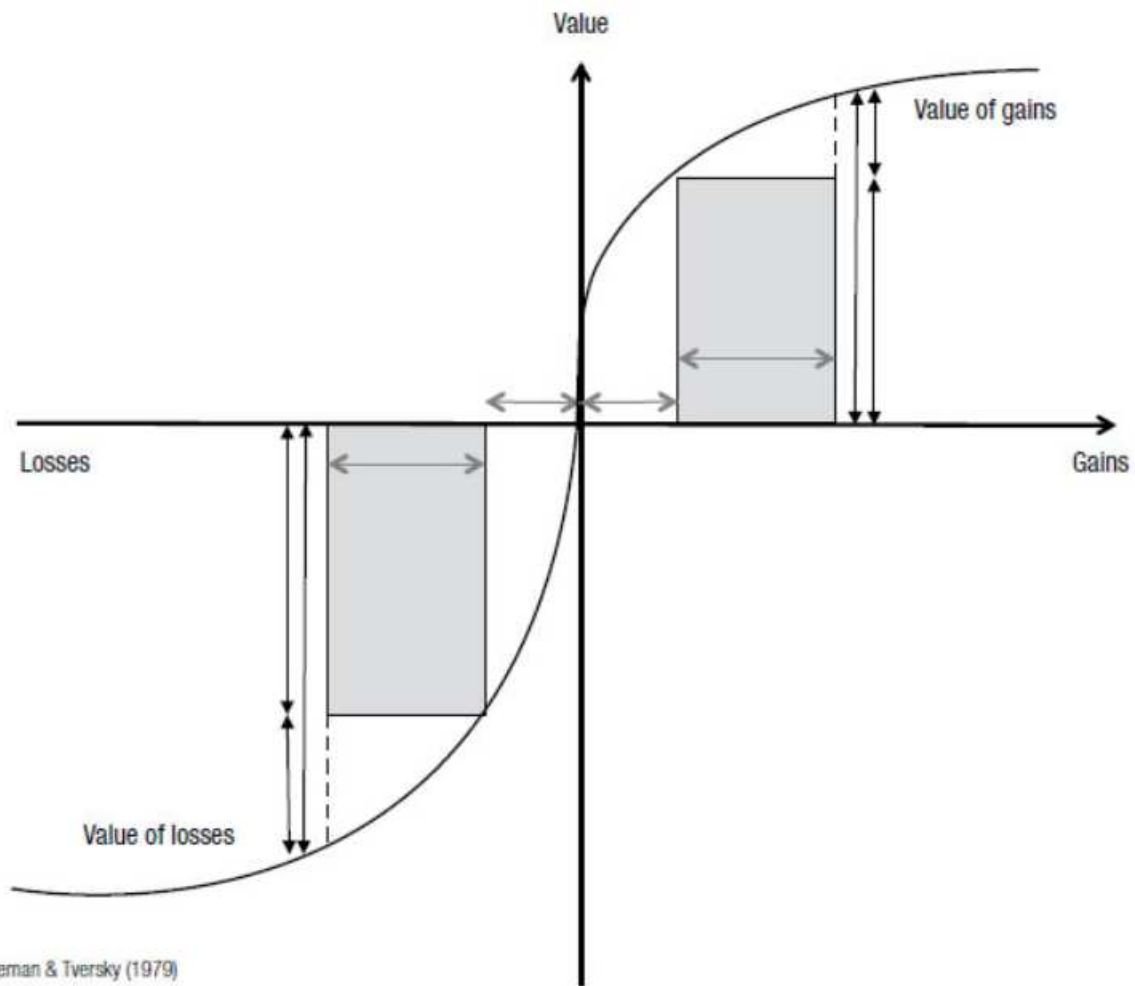


- Vert : choix d'agents averse au risque pour les deux loteries
- Rouge : choix d'agents risquophiles pour les deux loteries
- Dégradé vert/rouge : choix d'agents averse au risque pour les gains et risquophiles pour les pertes (et inversement).

Problèmes n° 9 et 10



- Vert : choix cohérents d'agents averses au risque pour les deux mêmes loteries
- Rouge : choix cohérents d'agents risquophiles pour les deux mêmes loteries
- Dégradé vert/rouge : choix incohérents d'agents averses au risque pour la loterie présentée en termes de gains et risquophiles en termes de pertes (et inversement).



Developed by: Kahneman & Tversky (1979)

2.4 Théorie de l'utilité espérée subjective et paradoxe d'Ellsberg

Savage (1954) construit une théorie basée sur six axiomes lorsque l'ensemble des réalisations est fini.

Un axiome "clé" est le Principe de la chose sûre :

Ce principe implique que, si un individu préfère une option X à une autre option Y dans les circonstances W et qu'il préfère également X à Y pour le complémentaire de W , alors il doit préférer X à Y même s'il ne sait pas quelles seront les circonstances (W ou non W) dans lesquelles se feront le choix.

Illustrons simplement ce principe par un exemple.

On vous propose deux options distinctes X et Y :

- X = (2 billets pour un match de football s'il ne pleut pas ; 50 euros s'il pleut)
- Y = (2 billets pour un match de basket s'il ne pleut pas ; 50 euros s'il pleut).

Que préférez-vous ? X ou Y ?

On vous propose deux autres options distinctes X' et Y' :

- X' = (2 billets pour un match de football s'il ne pleut pas ; 0 euro s'il pleut)
- Y' = (2 billets pour un match de basket s'il ne pleut pas ; 0 euro s'il pleut).

Que préférez-vous ? X' ou Y' ?

Le principe de la chose sûre implique logiquement ici que si vous préférez X à Y, alors vous devez aussi préférer X' à Y'.

Autrement dit, votre préférence pour un match de football (ou de basket) ne dépend pas du temps qu'il fait ni de la somme d'argent que vous percevrez s'il pleut.

Si l'on ajoute des hypothèses "standard" (préordre complet, monotonie, continuité) à ce principe, Savage montre que la relation de préférences peut être représentée par une fonction SEU telle que R_1 est préférée à R_2 ssi $SEU[R_1] \geq SEU[R_2]$ où :

$$SEU[R] = \mathbb{E}_Q[u(R)]$$

où :

- u est une fonction d'utilité,
- Q est une mesure de probabilité.

SEU signifie "Subjective Expected Utility", l'adjectif "subjective" étant là pour rappeler que la mesure Q est attribuée par le décideur et n'est pas une donnée objective du problème de décision.

Une urne est composée de 30 boules rouges et 60 boules noires ou jaunes (dans des proportions inconnues).

Problème 11 :

On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous gagnez 100 euros si une boule rouge est tirée.
- Vous ne gagnez rien si une boule noire ou jaune est tirée.

Loterie B :

- Vous gagnez 100 euros si une boule noire est tirée.
- Vous ne gagnez rien si une boule rouge ou jaune est tirée.

Laquelle choisissez-vous ?

- A
- B

Une urne est composée de 30 boules rouges et 60 boules noires ou jaunes (dans des proportions inconnues).

Problème 12

On vous propose de jouer à deux loteries :

Loterie A :

- Vous gagnez 100 euros si une boule rouge ou jaune est tirée.
- Vous ne gagnez rien si une boule noire est tirée.

Loterie B :

- Vous gagnez 100 euros si une boule noire ou jaune est tirée.
- Vous ne gagnez rien si une boule rouge est tirée.

Laquelle choisissez-vous ?

- A
- B

Le paradoxe d'Ellsberg

La majorité des gens préfèrent 11A à 11B (env. 80%) et 12B à 12A (env. 80%).

	Rouge	Noire	Jaune
	(30 boules)	(60 boules)	
11A	100	0	0
11B	0	100	0
12A	100	0	100
12B	0	100	100

Ces préférences contredisent :

- le principe de la chose sûre
- l'additivité des probabilités

1) Le principe de la chose sûre :

- 11A et 11B (respectivement 12A et 12B) conduisent à une même conséquence 0 (respectivement 100) sous l'événement "La boule tirée est de couleur jaune".

- 11A et 12A de même que 11B et 12B sont identiques par ailleurs sous l'événement "La boule tirée est de couleur rouge ou noire".

Par conséquent, "11A préférée à 11B" devrait conduire à "12A préférée à 12B".

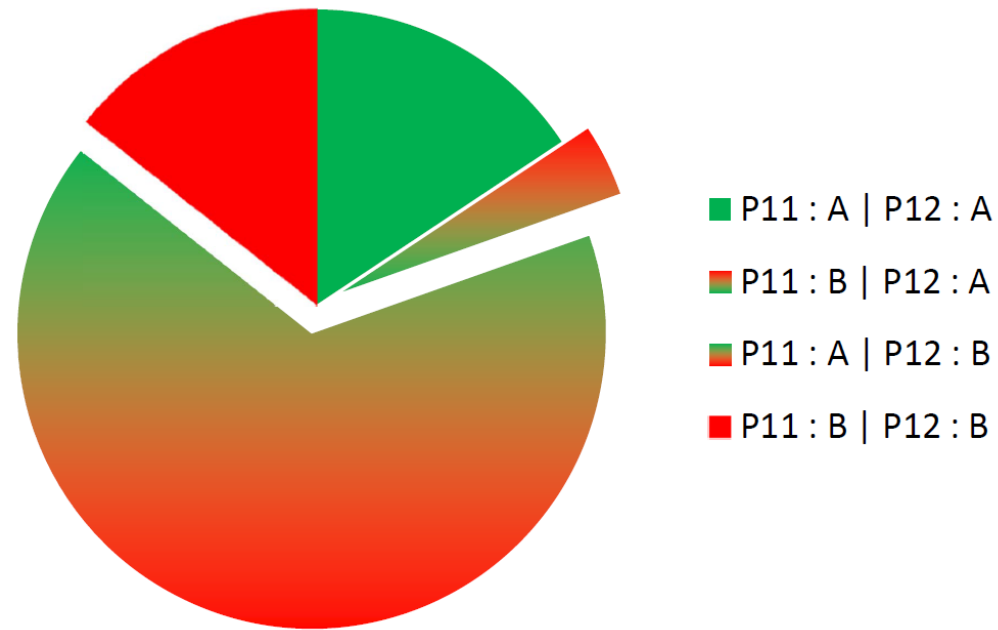
2) L'additivité des probabilités :

- "11A préférée à 11B" est équivalent à $Q(R) > Q(N)$.

- "12B préférée à 12A" est équivalent à $Q(N) + Q(J) > Q(R) + Q(J)$.

La contradiction vient du fait que l'on obtient $Q(N) + Q(J) > Q(N) + Q(J)$.

Problèmes n° 11 et 12



- Vert : choix cohérents d'agents qui n'aiment pas l'incertitude sur les probabilités de gains
- Rouge : choix cohérents d'agents qui préfèrent l'incertitude sur ces probabilités
- Dégradé vert/rouge : choix incohérents d'agents par rapport au principe de la chose sûre et de l'additivité des probabilités.

3 Distortion risk measures, ambiguity aversion and optimal effort

▷ A risk measure...

- is defined as a mapping from the set of random variables representing the risks to the real numbers ;
- may be interpreted as the amount of money that should be added as a buffer to a risk so that it becomes acceptable to an internal or external risk controller ;
- may be used for evaluating capital requirements in order to avoid insolvency, for determining provisions, for calculating insurance premiums...

▷ A risk X may be thought as an insurance company's risk : e.g. P&L (or rather L&P) of a particular line-of-business or to the entire insurance portfolio over a specified time horizon. A negative outcome for X means that a gain has occurred.

A decision-maker will always try to act to minimize the risk measure associated to X .

★ Distortion risk measures :

▷ The class of distortion risk measures...

- was introduced by Wang (1996) ;
- uses the concept of distortion function as proposed in Yaari's dual theory of choice (Yaari (1987)).

▷ A distortion function is defined as a non-decreasing function $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that $g(0) = 0$ and $g(1) = 1$.

▷ The distortion risk measure associated with distortion function g is defined by

$$\mathbb{H}_g[X] = - \int_{-\infty}^0 (1 - g(\bar{F}_X(x))) dx + \int_0^{\infty} g(\bar{F}_X(x)) dx,$$

where X is a (random) risk with survival distribution function \bar{F}_X .

★ Choices based on the distorted expectations hypothesis :

▷ In Yaari's dual theory of choice, a decision-maker (DM) is expected to act in order to maximize the distorted expectation of his wealth.

▷ Here we say that the decision-maker bases his preferences on the distorted expectations hypothesis if he acts in order to minimize the distorted expectation of his risk :

The DM prefers risk X over risk Y if $\mathbb{H}_g[X] \leq \mathbb{H}_g[Y]$.

▷ Note that a wealth, W , may be viewed as a negative risk, and that

$$\mathbb{H}_g[-W] = -\mathbb{H}_{g^*}[W]$$

where $g^*(u) = 1 - g(1 - u)$ is the dual distortion operator of g .

Therefore the decision-maker's preferences are equivalent if he uses the distortion function g^* for calculating the distorted expectation of his wealth.

★ Risk aversion and willingness to pay :

▷ A DM is *risk-averse* if he is averse to a mean preserving spread in the distribution of prospects.

These definition is equivalent to the condition that g^* is convex, or that g is concave (see e.g. Yaari (1987)).

▷ A DM with distortion function h is more risk-averse than a DM with distortion function g , if there exists a concave distortion function f such that $h = f \circ g$.

▷ Let X and Y be two risks such that X is preferred over Y , i.e. $\mathbb{H}_g[X] \leq \mathbb{H}_g[Y]$. The *willingness to pay for reducing risk* from Y to X is defined by

$$\pi(Y, X; g) = \mathbb{H}_g[Y] - \mathbb{H}_g[X].$$

3.1 Distortion risk measures and ambiguity aversion

We will assume that the DM is uncertain about a parameter of the risk distribution.

▷ The risk X is a random variable whose probability distribution belongs to a certain family of distributions $\{F_\theta, \theta \in \mathcal{T}\}$ (θ is a parameter for this family), called the parametric model, so that

$$F_X = F_{\theta_0}$$

for some $\theta_0 \in \mathcal{T}$. The value θ_0 is unknown and is referred to as the true value of the parameter.

▷ We denote by X_θ a risk whose probability distribution function is F_θ . The risk measure of X , $\mathbb{H}_g[X]$, is then equal to $\mathbb{H}_g[X_{\theta_0}]$.

▷ The subjective beliefs about the value of θ_0 are captured by a random variable Θ with density probability function π .

This random variable satisfies the mean preserving condition

$$\mathbb{H}_g[X] = \mathbb{H}_g[X_{\theta_0}] = \mathbb{E}[\mathbb{H}_g[X_{\Theta}]].$$

This condition ensures that the DM's ambiguous beliefs are objectively unbiased.

▷ We adapt the recursive model of ambiguity preferences with second-order probability distribution developed by Klibanoff et al. (2005) to the class of distortion risk measures.

Let φ be a non-decreasing and convex transformation function, called the ambiguity function. The DM's risk measure is defined by

$$\tilde{\mathbb{H}}_{g,\varphi}[X, \Theta] = \varphi^{-1} (\mathbb{E}[\varphi (\mathbb{H}_g[X_{\Theta}])]) = \varphi^{-1} \left(\int_{\mathcal{I}} \varphi (\mathbb{H}_g[X_{\theta}]) \pi (\theta) d\theta \right).$$

★ Risk aversion and willingness to pay :

▷ A DM is *ambiguity-averse* if

$$\tilde{\mathbb{H}}_{g,\varphi}[X, \Theta] \geq \mathbb{H}_g[X].$$

Since φ is convex, it is always the case by Jensen's inequality.

▷ A DM with ambiguity function ψ is more ambiguity-averse than a DM with ambiguity function φ , if there exists an increasing and convex function χ such that $\psi = \chi \circ \varphi$.

▷ The willingness to pay for information that resolves ambiguity, $\omega(\Theta, \theta_0)$, is defined by

$$\omega(\Theta, \theta_0) = \tilde{\mathbb{H}}_{g,\varphi}[X, \Theta] - \mathbb{H}_g[X].$$

Theorem : *For ambiguity-averse DMs, the willingness to pay for information that resolves ambiguity increases with greater ambiguity aversion.*

3.2 Ambiguity aversion and optimal effort

▷ We consider a DM with distortion function g who faces a risk Z .

▷ Assume that this DM could make an effort $e \in [0, 1]$ to shift his risk distribution toward a better target distribution of a risk Y such that Y is preferred over Z , i.e.

$$\mathbb{H}_g[Y] \leq \mathbb{H}_g[Z].$$

▷ But this effort has a monetary cost characterized by a function c with $c(0) = 0$, $c' > 0$ and $c'' > 0$.

▷ After the investment in effort e , the decision maker's final risk is denoted by $X^{(e)}$ whose quantile function is assumed to be given by

$$VaR[X^{(e)}; \alpha] = eVaR[Y; \alpha] + (1 - e)VaR[Z; \alpha], \quad 0 < \alpha < 1.$$

▷ The objective function of the decision maker is then given by

$$\min_{e \in [0,1]} \left(\mathbb{H}_g[X^{(e)}] + c(e) \right).$$

We assume that the optimal effort e_g^* belongs to the interval $(0, 1)$.

Theorem : Any more risk-averse DM with distortion function h who has willingness to pay $\pi(Z, Y; h)$ that is larger than $\pi(Z, Y; g)$ will invest more in effort.

★ Optimal effort with ambiguity

▷ We now impose ambiguity on the target distribution of Y .

▷ Let \underline{Y} and \bar{Y} be two risks such that

$$\mathbb{H}_g[\underline{Y}] \leq \mathbb{H}_g[\bar{Y}] \leq \mathbb{H}_g[Z].$$

▷ We assume that Y is a random variable whose probability distribution belongs to the family of distributions $\{F_\theta, \theta \in [0, 1]\}$ characterized by the random variables Y_θ with probability distribution functions F_θ and quantile functions

$$VaR[Y_\theta; \alpha] = (1 - \theta) VaR[\underline{Y}; \alpha] + \theta VaR[\bar{Y}; \alpha].$$

▷ The true value of the parameter is denoted by θ_0 . The subjective beliefs about the value of θ_0 are captured by a random variable Θ satisfying $\mathbb{E}[\Theta] = \theta_0$.

▷ For a given $\theta \in [0, 1]$, the DM's final risk after the investment in effort e is denoted by $X_\theta^{(e)}$ and has a quantile function which is given by

$$VaR[X_\theta^{(e)}; \alpha] = e \left[(1 - \theta) VaR[\underline{Y}; \alpha] + \theta VaR[\bar{Y}; \alpha] \right] + (1 - e) VaR[Z; \alpha].$$

▷ The objective function of the decision maker is then given by

$$\min_{e \in [0, 1]} \tilde{\mathbb{H}}_{g, \varphi}[X^{(e)} + c(e), \Theta] = \min_{e \in [0, 1]} \varphi^{-1} \left(\mathbb{E} \left[\varphi \left(\mathbb{H}_g[X_\Theta^{(e)}] + c(e) \right) \right] \right).$$

We assume that the optimal effort e_φ^* belongs to the interval $(0, 1)$.

Theorem : A more ambiguity-averse DM will invest less in effort.

3.3 Conclusion

- ▷ We have considered uncertainty about the distribution of the risk and introduced new risk measures that take into account ambiguity aversion. In this framework our results confirm intuitive predictions about the value of information : the value of resolving ambiguity increases with greater ambiguity aversion.
- ▷ We have studied the problem of the optimal effort to reduce risk when uncertainty concerns the target distribution : *a more risk-averse DM will invest more in effort, but a more ambiguity-averse DM will invest less in effort.*
- ▷ This result could be of practical interest for loss prevention and safety incentive programs if there exists ambiguity about the target distributions of risks.

References

- Allais, M. (1953) “Le comportement de l’homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l’école Américaine”, *Econometrica*, 21, 503–546.
- Bernoulli, D. (1738) “Specimen theoriae novae de mensura sortis” in *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 5.
- Ellsberg, D. (1961) “Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms”, *Quarterly Journal of Economics*, 75, 643–669.
- Kahneman, D. (2011) *Thinking, Fast and Slow*. New York : Farrar, Straus and Giroux.
- Kahneman, D., and Tversky, A. (1979) “Prospect Theory : An Analysis of Decision Under Risk”, *Econometrica*, XLVII, 263–291.
- Savage, L.J. (1954) *The Foundations of Statistics*. New York, Wiley.
- Wang, S. (1996) “Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density”, *ASTIN Bulletin*, **26**, 71-92.
- Yaari, M.E. (1987) “The Dual Theory of Choice under Risk”, *Econometrica*, **55**, 95-115.