

# Ambiguïté et aversion à l'incertitude

La théorie de la décision est un ensemble de théories de mathématiques appliquées normatives ayant pour but d'expliquer la façon dont des décisions devraient être prises.

Il existe des théories pour justifier les choix dans des situations de risque et/ou d'incertitude. On parlera de situations risquées ou de risques lorsque l'agent qui prend la décision connaît les distributions de probabilité sur les différents états du monde possibles. Si les distributions sont inconnues, on parlera de situation d'incertitude.

## La théorie de l'utilité espérée

Les travaux de Von Neumann & Morgenstern (1944), axiomatisant la théorie de l'utilité espérée, ont constitué, au cours de la deuxième moitié du xx<sup>e</sup> siècle, la théorie dominante pour analyser et modéliser le comportement des agents dans des situations risquées. Cette théorie conduit à représenter les préférences des agents à l'aide d'une fonction d'utilité permettant de donner une mesure du bien-être ou de la satisfaction obtenue pour la détention d'une richesse donnée. Ainsi, confronté à deux choix possibles de richesse aléatoires, un individu choisira la richesse qui maximise son espérance d'utilité. Formellement, si l'on considère (pour fixer les idées) un projet risqué ou une loterie  $l$  dont la distribution de probabilité est donnée par :

$$l = \left\{ \begin{array}{l} x_i, \text{ avec la probabilité } p_i \\ p_i \geq 0, i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1, \end{array} \right.$$

l'espérance de l'utilité retirée par ce projet risqué ou cette loterie est donnée par :

$$E[u(l)] = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i),$$

où  $u$  est la fonction d'utilité de l'agent économique. Si  $u$  est concave, l'agent est averse au risque. Si elle est linéaire, il est neutre au risque et prend

ses décisions sur la seule base de l'espérance mathématique.

La théorie de l'utilité repose sur un certain nombre d'axiomes, dont l'indépendance entre les probabilités et les préférences représentées par la fonction d'utilité. Cet axiome assure la linéarité de la représentation des préférences. Il conduit à ce que si une loterie  $l_1$  est préférée à une loterie  $l_2$  ( $l_1 \succ l_2$ ), alors, pour toute loterie  $l_3$ , la loterie  $(1-\alpha)l_1 + \alpha l_3$  est préférée à la loterie  $(1-\alpha)l_2 + \alpha l_3$ . Formellement, on a :

$$l_1 \succ l_2 \iff (1-\alpha)l_1 + \alpha l_3 \succ (1-\alpha)l_2 + \alpha l_3, 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Depuis le début des années 1950 et les travaux de Maurice Allais, cet axiome a fait l'objet de critiques en cela qu'il apparaît incohérent avec de nombreux résultats expérimentaux. En particulier, les psychologues Kahneman & Tversky (1979) ont mené une étude expérimentale, à partir d'une version ajustée de l'exemple original d'Allais, qui conduit à considérer les deux situations suivantes en matière de choix de loterie :

Situation 1	Situation 2
$A = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 2500 \$ & p_1 = 0,33 \\ x_2 = 2400 \$ & p_2 = 0,66 \\ x_3 = 0 & p_3 = 0,01 \end{array} \right.$	$C = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 2500 \$ & p_1 = 0,33 \\ x_2 = 0 & p_2 = 0,67 \end{array} \right.$
$B = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 2400 \$ & p_1 = 1 \end{array} \right.$	$D = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 2400 \$ & p_1 = 0,34 \\ x_2 = 0 & p_2 = 0,66 \end{array} \right.$

Dans la situation 1, le gain certain procuré par la loterie B est préféré par une large majorité (82% des sujets) à la loterie A. Cette dernière présente une espérance de gain plus élevée, mais aussi la possibilité de ne rien gagner avec une probabilité de 1%.

Dans la situation 2, les mêmes sujets préfèrent massivement (83%) la loterie C à la loterie D. Au global, 61% des sujets préfèrent la loterie B dans la situation 1 et la loterie C dans la situation 2.

Le schéma de préférence induit par les choix majoritaires est en contradiction avec la théorie de l'utilité espérée puisque les choix B et C conduisent (sous l'hypothèse que l'utilité d'une richesse nulle est nulle) respectivement à :

$$u(2400) > 0,33 \times u(2500) + 0,66 \times u(2400)$$

⇔

$$0,34 \times u(2400) > 0,33 \times u(2500),$$

et

$$0,34 \times u(2400) < 0,33 \times u(2500).$$

Pour répondre à ces paradoxes, d'autres théories ont été proposées comme celle de l'espérance d'utilité dépendante au rang, qui suppose que les agents n'utilisent pas la loi de probabilité de manière linéaire, mais ont recours à une fonction de transformation qui modifie cette loi de probabilité.

## La théorie de l'utilité espérée subjective

Dans beaucoup de situations, la loi de probabilité sur les événements possibles est peu ou mal connue et il peut exister une grande variété de niveaux d'information. Les théories de décision dans l'incertain vont, pour la plupart, imposer l'usage d'une représentation probabiliste ramenant toute situation d'incertitude à une situation de risque subjectif, dans le sens où tous les événements sont probabilisés mais que leurs probabilités peuvent varier d'un agent à l'autre.

Le modèle le plus connu et qui donne une justification axiomatique est la théorie développée par Savage (1954) qui, une fois l'incertain réduit à un risque subjectif, conduit les agents à décider suivant le critère de l'utilité espérée.

## L'ambiguïté

Le paradoxe d'Ellsberg (1961) montre que la majorité des agents sont averses à l'incertitude sur les probabilités. En pratique, une loterie qui présente un gain avec une probabilité de 50% est, dans la majorité des cas, préférée à une loterie qui conduit au même gain mais avec une probabilité subjective de 50% (par exemple si l'agent économique pense que la probabilité de gain est de 25% ou 75%, avec les mêmes probabilités).

Pour prendre en compte l'aversion de l'agent économique à l'incertitude relative aux probabilités, la notion d'ambiguïté a été introduite. Snow (2010) en donne la définition suivante :

« *Ambiguity is uncertainty about probability, created by missing information that is relevant and could be known.* »

Klibanoff, Marinacci et Mukerji (2005) font l'hypothèse que l'agent définit une loi de probabilité sur les lois probabilités a priori possibles et ont développé une axiomatique où le critère de décision à maximiser fait intervenir une fonction  $\varphi$  destinée à prendre en compte l'aversion à l'incertitude.

Donnons un exemple. Supposons que la distribution  $p=(p_i(\theta))$ ,  $1 \leq i \leq n$ , introduite dans le cadre de l'utilité espérée est paramétrée par  $\theta$ . À cause d'une méconnaissance sur la valeur de  $\theta$ , l'agent lui associe une distribution  $\mu$ . Il utilise alors le critère de décision suivant :

$$\sum_0 \mu(\theta) \varphi \left( \sum_{i=1}^n p_i(\theta) u(x_i) \right).$$

La fonction  $\varphi$  permet de prendre en compte l'aversion de l'agent à l'incertitude relative aux probabilités. Si  $\varphi$  est linéaire, alors le critère est le même que celui de l'espérance d'utilité avec pour distribution de probabilité des événements la distribution *a priori* moyenne. Une fonction  $\varphi$  concave reflète une aversion à l'ambiguïté dans le sens elle met plus de poids aux utilités espérées défavorables.

## Ambiguïté et assurance

Les applications potentielles de l'intégration de l'ambiguïté en assurance sont importantes dans la mesure où l'essentiel des risques techniques et financiers auxquels sont exposés les assureurs sont des situations d'incertitude sur la distribution des probabilités d'occurrence. Des développements académiques en font usage pour expliquer des problématiques de choix de portefeuille financier ou encore de détermination de niveaux optimaux d'auto-assurance.

Sur le plan opérationnel et à titre d'exemple, cette approche peut permettre de représenter l'appétence au risque d'un assureur dans le cadre d'une démarche Orsa. Elle peut également intervenir dans la modélisation et la projection des comportements des assurés : arbitrages sur des contrats d'épargne multi-soutports, soif de bonus en assurance automobile, etc. ■

Christian Robert (Isfa – université Lyon I)

et Pierre Théron (Galea & Associés, Isfa – université Lyon I)

### Quelques références bibliographiques

*Risk, ambiguity and the Savage axioms*, Ellsberg D., *The Quarterly Journal of Economics*, 75, 643-669, 1961

*Prospect theory: an analysis of decision under risk*, Kahneman D., Tversky A., *Econometrica*, 47, 263-91, 1979

*A smooth model of decision making under ambiguity*, Klibanoff P., Marinacci M., Mukerji S., *Econometrica*, 73, 1849-92, 2005

*The Foundations of Statistics*, Savage L.J., New York: Wiley, 1954

*Ambiguity and the value of information*, Snow A., *Journal of Risk and Uncertainty*, 40, 133-45, 2010

*Theory of Games and Economic Behavior*, Von Neumann J., Morgenstern O., Princeton: Princeton University Press, 1944