

Génération de scénarios économiques

Modélisation des taux d'intérêt

Pierre-E. Théron

ptherond@galea-associes.eu | pierre@therond.fr
Galea & Associés | ISFA - Université Lyon 1

22 novembre 2013

Motivation

La modélisation des taux d'intérêt est le cœur d'un générateur de scénarios économiques.

En particulier, dans les modèles *market-consistent*, les taux projetés constituent les *drifts* des autres classes d'actifs.

On se concentre dans ce cours sur les modèles de taux utilisés pour procéder à des évaluations *market-consistent* d'engagements d'assureurs. Dans d'autres situations (allocation stratégique d'actifs, revalorisation à long terme, etc.) d'autres approches peuvent être plus pertinentes (cf. Planchet et al. (2009)).

Motivation

Idéalement, les modèles de taux doivent être suffisamment complexes pour :

- représenter correctement la structure par termes des taux d'intérêt (et notamment la courbe des taux à la date de projection) ;
- intégrer une dynamique d'évolution de la courbe des taux cohérentes avec les déformations observées sur les marchés

Dans le même temps, leur mise en œuvre et leur contrôle est facilité par

- leur simplicité de discrétisation et de simulation ;
- l'existence de formules fermées d'obtention de prix pour les instruments financiers (obligations sans risque, contrats à terme et options).

Notations

- Taux d'intérêt instantané à la date t : r_t
- Prix d'une obligation zéro-coupon de nominal 1, à la date 0, de maturité T :

$$P(0, T) = E \left[\exp - \int_0^T r_s ds \right]$$

- Prix d'une obligation à la date t , de maturité T :

$$P(t, T) = E \left[\exp - \int_t^T r_s ds \mid \mathcal{F}_t \right]$$

- Taux zéro-coupon à la date 0, de maturité T : $R(0, T)$
- Taux forward instantané à la date t de maturité T :

$$f(t, T) = - \frac{d \ln(P(t, T))}{dT}$$

Plan du cours

- 1 Construction de courbe de taux
- 2 Typologies de modèles de taux
- 3 Un modèle de taux : le G2++
- 4 Mise en œuvre : G2++

Sommaire

- 1 Construction de courbe de taux
 - Introduction
 - Méthode du bootstrapping
 - Méthode de Nelson-Siegel
 - Méthode Smith-Wilson
- 2 Typologies de modèles de taux
- 3 Un modèle de taux : le G2++
- 4 Mise en œuvre : G2++

1.1. Introduction

Qu'est-ce-qu'une courbe de taux ?

La structure par terme des taux d'intérêt (ou courbe des taux) est la fonction qui, à une date donnée, associe pour chaque maturité le niveau du taux d'intérêt associé.

1.1. Introduction

En pratique, il existe sur les marchés non pas une courbe des taux mais plusieurs courbes des taux. Nous pouvons distinguer deux familles :

- **Courbes de marché**, i.e. construites **directement** à partir des cotations sur les marchés :
 - courbe de taux swap
 - courbe de rendement des obligations d'État
- **Courbes implicites**, i.e. construites **indirectement** à partir des cotations de marché d'instruments comme les obligations et les swaps :
 - courbe de taux zéro-coupon
 - courbe des taux forward
 - courbe des taux forward instantanés
 - courbe des taux de rendement au pair

1.1. Introduction

Avant de s'intéresser à la modélisation de la dynamique des taux d'intérêt, on s'intéresse aux différentes techniques qui permettent de construire une courbe des taux à partir des données de marché :

- bootstrapping,
- Nelson-Siegel,
- Smith-Wilson.

1.2. Méthode du bootstrapping

Qu'est-ce-que le bootstrapping ?

Le bootstrapping est une procédure qui permet de reconstituer une courbe zéro-coupon pas à pas, i.e. segment de maturité par segment de maturité. En pratique cela revient à :

Pour le segment de maturité inférieure à 1 an

- Extraction des taux zéro-coupon grâce aux prix des titres zéro-coupon cotés sur le marché
- Interpolation linéaire ou cubique pour obtenir une courbe continue

1.2. Méthode du bootstrapping

Pour le segment de maturité allant de 1 an à 2 ans

On observe le prix et les caractéristiques (flux contractuels) de l'obligation à l'échéance la plus rapprochée. Supposons qu'elle verse deux flux (coupon / coupon + remboursement) :

- le facteur d'actualisation du premier flux est connu grâce à l'étape 1
- le facteur d'actualisation du second flux est solution de l'équation

Formellement, on a :

$$P(0, t_2) = C \times P_{zc}(0, t_1) + (100 + C) \times P_{zc}(0, t_2)$$

avec C le coupon, $t_1 \leq 1$ et $1 < t_2 \leq 2$.

1.2. Méthode du bootstrapping

Pour le segment de la courbe allant de 2 ans à 3 ans

On réitère l'opération précédente à partir des titres ayant une maturité comprise entre 2 ans et 3 ans. etc.

1.2. Méthode du bootstrapping

Illustration

Sur le marché, toutes les échéances d'obligation zéro-coupon n'existent pas. Supposons que l'on ait les données suivantes :

Table : Liste des obligations

Principal	Maturité en année	Coupon annuel	Prix
100	0.25	0%	97.5
100	0.50	0%	94.9
100	1.00	0%	90.0
100	1.50	8%	98.0
100	2.00	12%	99.0

1.2. Méthode du bootstrapping

Illustration

Les trois premières obligations ne payent pas de coupon, les taux ZC correspondant à ces maturités sont obtenus aisément : $R(0, T)$ avec T exprimé en année.

$$100 = 97.5 \times \left(1 + R\left(0, \frac{1}{4}\right)\right)^4$$

$$\Leftrightarrow R\left(0, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{100}{97.5}\right)^4 - 1$$

$$\Leftrightarrow R\left(0, \frac{1}{4}\right) = 10,65\%$$

1.2. Méthode du bootstrapping

Illustration

Par des calculs similaires, on a :

$$R\left(0, \frac{1}{2}\right) = .1103$$

$$R(0, 1) = .1111$$

1.2. Méthode du bootstrapping

Illustration

Pour obtenir $R(0, \frac{3}{2})$, il suffit de résoudre :

$$98 = \frac{8}{(1 + 0,1103)^{\frac{1}{2}}} + \frac{108}{(1 + R(0, \frac{3}{2}))^{1+\frac{1}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow R\left(0, \frac{3}{2}\right) = 12,58\%$$

Enfin, $R(0, 2)$ est obtenu par la réalisation de :

$$99 = \frac{12}{(1 + 0,1111)^1} + \frac{112}{(1 + R(0, 2))^2}$$

$$\Leftrightarrow R(0, 2) = 12,69\%$$

1.2. Méthode du bootstrapping

Nous avons alors les taux zéro-coupon suivants :

Table : Les taux zéro-coupon

Maturité	Taux ZC
0.25	10,65%
0.5	11,03%
1	11,11%
1.5	12,58%
2	12,69%

A ce stade, la courbe des taux n'est définie qu'à certaines maturités. Pour obtenir toutes les maturités, des méthodes d'interpolation peuvent être employées.

1.2. Méthode du bootstrapping

Interpolation

Lorsque l'on utilise un bootstrap, il est nécessaire de choisir une méthode d'interpolation. Celles-ci peuvent, par exemple, être :

- linéaires,
- cubiques.

Interpolation linéaire

On connaît les taux zero-coupon de maturités t_1 et t_2 . On interpole le taux de maturité $t_1 < t < t_2$ par :

$$R(0, t) = \frac{(t_2 - t)R(0, t_1) + (t - t_1)R(0, t_2)}{t_2 - t_1}$$

1.2. Méthode du bootstrapping

Interpolation cubique

On procède à une interpolation cubique par segment de courbes.
On définit un premier segment entre t_1 et t_3 où l'on dispose de trois taux $R(0, t_1)$, $R(0, t_2)$ et $R(0, t_3)$.

Le taux $R(0, t)$ de maturité t est défini par : $at^3 + bt^2 + ct + d$
sous la contrainte que la courbe passe par les trois points. D'où :

$$R(0, t_1) = at_1^3 + bt_1^2 + ct_1 + d$$

$$R(0, t_2) = at_2^3 + bt_2^2 + ct_2 + d$$

$$R(0, t_3) = at_3^3 + bt_3^2 + ct_3 + d$$

1.3. Méthode de Nelson-Siegel

La méthode de Nelson-Siegel consiste à modéliser la courbe de taux zéro-coupon au moyen de :

$$R(0, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - \exp(-\tau/\alpha)}{\tau/\alpha} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp(-\tau/\alpha)}{\tau/\alpha} - \exp(-\tau/\alpha) \right) \quad (1)$$

avec :

- $R(0, \tau)$ le taux ZC de maturité τ
- α le paramètre d'échelle
- β_0 le facteur de niveau i.e. le taux long
- β_1 le facteur de rotation i.e. l'écart entre taux court et taux long
- β_2 le facteur de pente

1.3. Méthode de Nelson-Siegel

Remarque :

Une étude menée par Roncalli [1998] avec la **méthode de l'Analyse en Composantes Principales** a mis en évidence que deux facteurs expliquent plus de 98% de la variance totale : le facteur de niveau et le facteur de pente.

Mise en œuvre

- 1 Estimation des paramètres
- 2 Les implémenter dans la formule $R(0, \tau)$

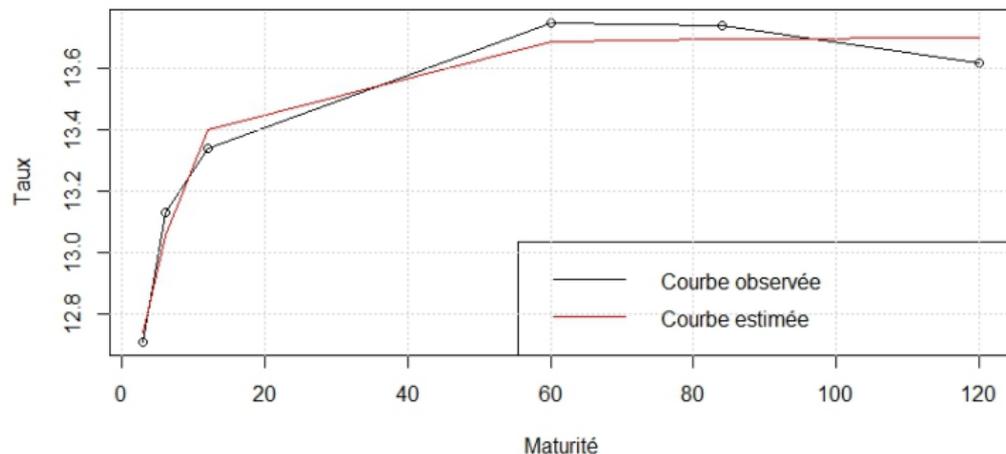
1.3. Méthode de Nelson-Siegel

Mise en œuvre sur \mathcal{R}

```
1 library("YieldCurve") # Chargement du package
  data(FedYieldCurve) # Données du package
3 tau <- c(3, 6, 12, 60, 84, 120) # Mes maturités
  mediumTerm <- c(12,60,84)
5 NSParameters <- Nelson.Siegel( rate=FedYieldCurve
  [1:10,], maturity=tau, MidTau=mediumTerm ) #
  Estimation des paramètres
y <- NSrates(NSParameters[5,1:3], NSParameters$
  lambda[5],tau) # Implémentation avec les paramè
  tres
```

1.3. Méthode de Nelson-Siegel

Figure : Méthode Nelson-Siegel



1.3. Méthode de Nelson-Siegel

Le modèle de Nelson-Siegel ne permet de reconstituer toutes les courbes de taux rencontrées sur le marché. En particulier les formes à une bosse et un creux ne peuvent être reproduites. Le modèle de Nelson-Siegel augmenté y remédie.

La fonctionnelle du modèle de Nelson-Siegel augmenté est donnée par :

$$\begin{aligned} R(0, \tau) = & \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - \exp(-\tau/\alpha_1)}{\tau/\alpha_1} \right) \\ & + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp(-\tau/\alpha_1)}{\tau/\alpha_1} - \exp(-\tau/\alpha_1) \right) \\ & + \beta_3 \left(\frac{1 - \exp(-\tau/\alpha_2)}{\tau/\alpha_2} - \exp(-\tau/\alpha_2) \right) \end{aligned}$$

1.3. Méthode de Nelson-Siegel

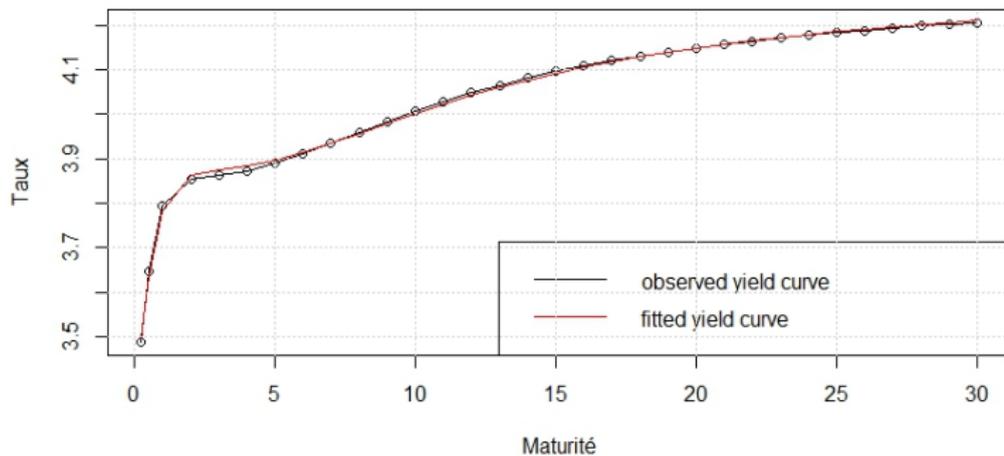
Par rapport à Nelson-Siegel, l'ajout d'une troisième variable explicative permet de mieux prendre en considération les formes de courbure.

Mise en œuvre sur \mathcal{R}

```
data(ECBYieldCurve) # Chargement des données dans le
package
2 tauECB <- c(0.25,0.5,1:30)
Y <- Svensson(ECBYieldCurve[1:10,], tauECB, c(1,4),
c(5,8) ) # Estimation des paramètres
4 B <- Srates(Y[,1:4], Y[,5:6], tauECB, whichRate="
Spot") # Implémentation des paramètres
```

1.3. Méthode de Nelson-Siegel

Figure : Méthode Nelson-Siegel-Svensson



1.4. Méthode Smith-Wilson

- Sur le marché, nous observons des prix zéro-coupons de différentes maturités : u_1, \dots, u_N
 - Le but de la méthode de SW est de trouver le prix des ZC pour les autres maturités
 - Entre u_1, \dots, u_N , **méthode d'interpolation**
 - Entre $u_{N+\epsilon}, \dots$, **méthode d'extrapolation**
- en fonction d'un **taux forward long** *Ultimate Forward Rate* (UFR)
- On pourra alors facilement déterminer la courbe des taux ZC

1.4. Méthode Smith-Wilson

La fonction de prix utilisée par Smith-Wilson est :

$$P_{zc}(0, \tau) = e^{-UFR\tau} + \sum_{j=1}^N \gamma_j W(\tau, u_j)$$

avec :

$$W(\tau, u_j) = e^{-UFR(\tau+u_j)} + \left\{ \alpha \min(\tau, u_j) - 0.5 e^{-\alpha \max(\tau, u_j)} \left(e^{\alpha \min(\tau, u_j)} - e^{-\alpha \min(\tau, u_j)} \right) \right\}$$

où :

- UFR est l'*ultimate forward rate*
- α est une mesure de la vitesse de convergence vers UFR
- N est le nombre de d'obligations ZC dont le prix est observé
- $u = (u_1, \dots, u_N)$ le vecteur des maturités de ces obligations ZC

1.4. Méthode Smith-Wilson

Détermination de γ (1)

A UFR et α fixés, le vecteur γ s'obtient comme solution d'un système d'équations linéaires définies par l'expression du prix de chaque obligation ZC considérée.

Soit :

$$m_j = P_{zc}(0, u_j) = e^{-UFRu_j} + \sum_{j=1}^N \gamma_j W(\tau, u_j)$$

L'écriture matricielle donne : $m = p = \mu + \gamma W$, avec :

$$m = (m_1, \dots, m_N)^T$$

$$p = (P_{zc}(0, u_1), P_{zc}(0, u_2), \dots, P_{zc}(0, u_N))^T$$

$$\mu = (e^{-UFRu_1}, e^{-UFRu_2}, \dots, e^{-UFRu_N})^T$$

1.4. Méthode Smith-Wilson

Détermination de γ (2)

On en déduit

$$\gamma = W^{-1}(p - \mu) = W^{-1}(m - \mu)$$

Une fois γ déterminé, le prix des ZC pour toute maturité (y compris $\tau > u_N$) est obtenu par :

$$P_{zc}(0, \tau) = e^{-UFR\tau} + \sum_{j=1}^N \gamma_j W(\tau, u_j)$$

Sommaire

- 1 Construction de courbe de taux
- 2 Typologies de modèles de taux
 - Les classes de modèles
 - Modèles à 1 facteur
 - Modèles à 2 facteurs
 - Classe HJM
- 3 Un modèle de taux : le G2++
- 4 Mise en œuvre : G2++

2.1. Les classes de modèles

Il existe une multitude de modèles de taux, nous pouvons distinguer trois catégories :

- modèles mono-factoriels e.g. Vašíček, Ho et Lee, Cox, Ingersoll et Ross (CIR)
- modèles multi-factoriels e.g. Hull et White, Fong et Vašíček, Longstaff et Schwartz
- modèles de classe HJM (Heath, Jarrow et Morton)

2.2. Modèles à 1 facteur

Hypothèses des modèles mono-factoriels

- marché viable (i.e. absence d'opportunité d'arbitrage), complet et absence de coûts de transactions
- une seule variable d'état x déterminant le prix de l'obligation zéro-coupon
- la variable d'état x suit la dynamique suivante :

$$dx_t = \mu(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t, \text{ tels que}$$

W : mouvement brownien sous la probabilité historique \mathcal{P}

σ : volatilité de x

μ : moyenne de x

- il existe un actif sans risque dont le rendement r dépend de la variable d'état x : $r = r(t, x(t))$

2.2. Modèles à 1 facteur

Le modèle de **Vašíček (1977)** propose de prendre comme variable d'état le taux court modélisé par un **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** dans l'univers historique \mathcal{P}

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

avec :

a : force de rappel de retour à la moyenne

b : taux d'intérêt de long terme

σ : volatilité du taux d'intérêt r_t

Dans l'univers risque neutre, sous la mesure \mathcal{Q} , on a :

$$dr_t = a(b_\lambda - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathcal{Q}}$$

tel que : $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$

2.2. Modèles à 1 facteur

Le modèle de Ho et Lee (1986) est utilisé pour déterminer le taux d'intérêt court. Il suit la dynamique suivante :

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t$$

avec :

θ_t : moyenne du taux court **évoluant dans le temps**

σ : volatilité du taux court

2.2. Modèles à 1 facteur

Le modèle CIR (1985) modélise le taux d'intérêt court sous la dynamique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

avec :

a : vitesse de retour à la moyenne

b : le taux de long terme

σ : la volatilité du processus

Sous la probabilité risque neutre \mathcal{Q} , la dynamique devient :

$$dr_t = a_\lambda(b_\lambda - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathcal{Q}}$$

tels que $a_\lambda = a(1 + \lambda)$ et $b_\lambda = \frac{b}{(1 + \lambda)}$

2.2. Modèles à 1 facteur

Table : Avantages et inconvénients des modèles mono-factoriels

Modèles	Avantages	Inconvénients
Vašíček	Simple	Taux négatif possible
	Peu de paramètres	Matche mal la courbe des taux
	Effet de retour à la moyenne	
Ho et Lee	Simple	Taux négatif possible
	θ en fonction du temps	Aucun retour à la moyenne
CIR	Simple	N'est pas un processus gaussien
	Effet de retour à la moyenne	
	Taux d'intérêt toujours positif	

L'intégration d'une unique variable d'état est généralement insuffisant pour reproduire le comportement des courbes des taux observées.

2.3. Modèles à 2 facteurs

Le modèle de Hull et de White (1994)

- coefficients dépendent du temps
- spécification sur la dynamique du taux court
- spécification sur la dynamique du taux long

$$\text{taux court :} \quad dr_t = \kappa_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r dW_{r,t}$$

$$\text{taux long :} \quad dl_t = \kappa_l(\mu_l - l_t)dt + \sigma_l dW_{l,t}$$

avec :

κ_r, κ_l : vitesses de retour à la moyenne pour le taux court et le taux long

σ_r, σ_l : volatilité pour le taux court et le taux long

μ_l : taux long à 50 ans

2.3. Modèles à 2 facteurs

Le modèle de Fong et Vašíček

Dans ce modèle, deux variables d'état sont utilisées :

$$\text{Taux court : } dr_t = \alpha(b - r_t)dt + \sqrt{\nu(t)}dW_1(t)$$

$$\text{Variance du taux court : } d\nu_t = \gamma(c - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu(t)}dW_2(t)$$

avec :

b, c : la moyenne long-terme du taux instantané et de sa variance

α, γ : vitesses de retour à la moyenne pour le taux court et sa variance

2.3. Modèles à 2 facteurs

Le modèle de Longstaff et Schwartz

Les dynamiques données par les deux variables d'état sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dx_t = a(b - x_t)dt + c\sqrt{x_t}dW_2(t)$$

$$dy_t = a(e - y_t)dt + f\sqrt{y_t}dW_3(t)$$

Le taux instantané s'exprime au moyen de ces deux processus par :

$$dr_t = (\mu x_t + \theta y_t)dt + \sigma\sqrt{y_t}dW_1(t).$$

où :

- W_2 est non-corrélé avec W_1 et W_3 ,
- $\theta > \sigma^2$ assure la non-négativité de r .

2.3. Modèles à 2 facteurs

Table : Avantages et inconvénients des modèles bi-factoriels

Modèle	Avantages	Inconvénients
HW	Formules fermées Effet de retour à la moyenne Discrétisation exacte 2 variables d'état	Taux négatifs possibles Formules imposantes N'observe pas la volatilité
FV	2 variables d'état Retour à la moyenne Taux court toujours positif	Variance complexe
LS	2 variables d'état Formule fermée	Beaucoup de paramètres : 11 Pas de discrétisation exacte Prix des obligations ZC complexe

2.4. Classe HJM

L'approche développée par Heath, Jarrow et Morton est fondée sur la volonté de construire un modèle respectant la courbe des taux initiale, prise comme point de départ.

Elle définit un cadre général dont tous les modèles compatibles avec la courbe des taux spots est un cas particulier. Ce modèle permet de modéliser la structure à terme de taux d'intérêt du point de vue de la théorie de l'arbitrage (cf. Brigo and Mercurio (2006) ou Planchet et al. (2011) pour un descriptif de cette classe de modèles).

Sommaire

- 1 Construction de courbe de taux
- 2 Typologies de modèles de taux
- 3 Un modèle de taux : le G2++**
 - Présentation du modèle
 - Propriétés
 - Calibrage du modèle
- 4 Mise en œuvre : G2++

3.1. Présentation du modèle

Il s'agit d'un modèle bi-factoriel déterminant le taux court créé par Brigo and Mercurio (2006). La dynamique du taux court est donnée par :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t), \quad r(0) = r_0$$

où

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), \quad x(0) = x_0$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), \quad y(0) = y_0$$

- a, b : coefficients de retour à la moyenne
- σ, η : volatilités des processus
- ces paramètres sont tous positifs et constants
- corrélation entre les deux mouvements browniens W_1 et W_2 :

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$$

3.1. Présentation du modèle

- ϕ est une fonction déterministe et en particulier $\phi(0) = r_0$.
- Le modèle G2++ est calibré sur la courbe $P^M(0, T)$ de prix d'obligations zéro-coupon si et seulement si :

$$\begin{aligned}\phi(T) = f^M(0, T) &+ \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2 \\ &+ \rho \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-aT}) (1 - e^{-bT})\end{aligned}$$

- $f^M(0, T)$ taux forward instantanée de maturité T
- Estimation des paramètres par moindres carrés généralisés

3.1. Présentation du modèle

En résolvant les équations des dynamiques de $x(t)$ et $y(t)$, nous avons :

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} \\ + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \phi(t)$$

Table : Les avantages et inconvénients du modèle

Avantages	Inconvénients
Nombreuses formules fermées	Taux d'intérêt négatif
Bonne représentation de la courbe des taux	
Uniquement 5 paramètres à estimer	

3.2. Propriétés

Prix d'un ZC de maturité T à la date t

$$P_{zc}(t, T) = \exp \left(- \int_t^T \phi(u) du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) \right) \exp \left(- \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right)$$

où :

$$V(t, T) = \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) + \frac{\eta^2}{b^2} \left(T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right) + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left(T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right)$$

3.2. Propriétés

Prix d'un ZC à la date t de maturité T (calibré) (1)

G2++ permet de calibrer le taux d'intérêt sur le prix des obligations ZC observés. On a :

$$\begin{aligned}\phi(T) = f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2 \\ + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-aT}) (1 - e^{-bT})\end{aligned}$$

Si nous calibrons le modèle avec les données du marché, le prix d'une obligation zéro-coupon à la date t est donnée par :

$$P_{zc}(t, T) = \frac{P_{zc}^M(0, T)}{P_{zc}^M(0, t)} e^{A(t, T)}$$

3.2. Propriétés

Prix d'un ZC à la date t de maturité T (calibré) (2)

On a :

$$A(t, T) = \frac{1}{2} (V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)) \\ - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t)$$

3.2. Propriétés

Prix d'un caplet (1)

A la date t et aux dates futures T_1 et T_2 , le payoff d'un caplet à la date T_2 nous donne :

$$[L(T_1, T_2) - X]^+ \alpha(T_1, T_2) N$$

où N est la valeur nominale, X le prix d'exercice du caplet, $\alpha(T_1, T_2)$ représente la fraction d'année entre T_1 et T_2 et $L(T_1, T_2)$ est le taux LIBOR à la date T_1 de maturité T_2 :

$$L(T_1, T_2) = \frac{1}{\alpha(T_1, T_2)} \left[\frac{1}{P(T_1, T_2)} - 1 \right]$$

3.2. Propriétés

Prix d'un caplet (2)

Sous la probabilité risque-neutre, le payoff d'un caplet à la date t s'écrit :

$$\begin{aligned}Cpl(t, T_1, T_2, N, X) &= N' ZBP(t, T_1, T_2, X') \\ &= ZBP(t, T_1, T_2, N', N)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}X' &= \frac{1}{1 + X\alpha(T_1, T_2)} \\ N' &= N(1 + X\alpha(T_1, T_2))\end{aligned}$$

3.2. Propriétés

Prix d'un caplet (3)

Explicitement, on a :

$$\begin{aligned} Cpl(t, T, \tau, N, X) &= -N(1 + X\tau)P(T_1, T_2) \times \\ &\quad \phi \left(\frac{\ln \frac{P(t, T_1)}{(1 + X\tau)P(t, T_2)}}{\Sigma(t, T_1, T_2)} - \frac{1}{2}\Sigma(t, T_1, T_2) \right) \\ &+ P(t, T_1)N\phi \left(\frac{\ln \frac{P(t, T_1)}{(1 + X\tau)P(t, T_2)}}{\Sigma(t, T_1, T_2)} + \frac{1}{2}\Sigma(t, T_1, T_2) \right) \end{aligned}$$

3.2. Propriétés

Prix d'un caplet (4)

où

$$\begin{aligned}\Sigma(t, T, S)^2 &= \frac{\sigma^2}{2a^3} \left[1 - e^{-a(S-T)}\right]^2 \left[1 - e^{-2a(S-T)}\right] \\ &+ \frac{\eta^2}{2b^3} \left[1 - e^{-b(S-T)}\right]^2 \left[1 - e^{-2b(S-T)}\right] \\ &+ 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab(a+b)} \left[1 - e^{-a(S-T)}\right] \times \\ &\quad \left[1 - e^{-b(S-T)}\right] \left[1 - e^{-(a+b)(S-T)}\right]\end{aligned}$$

3.3. Calibrage du modèle

Nous avons calibré le modèle avec le prix des obligations ZC observé sur le marché. Il faut déterminer $\phi(T)$, autrement dit :

- estimer le taux forward instantané $f^M(0, T)$
- estimer les paramètres : a, b, σ, η, ρ

3.3. Calibrage du modèle

Estimation de $f^M(0, T)$ par la méthode NS augmenté

$$\begin{aligned} f_{\alpha, \beta}^M(\tau) = & \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp(-\tau/\alpha_1)}{\tau/\alpha_1} \right) \\ & + \beta_3 \left(\frac{1 - \exp(-\tau/\alpha_1)}{\tau/\alpha_1} - \exp(-\tau/\alpha_1) \right) \\ & + \beta_4 \left(\frac{1 - \exp(-\tau/\alpha_2)}{\tau/\alpha_2} - \exp(-\tau/\alpha_2) \right) \end{aligned}$$

3.3. Calibrage du modèle

Estimation des paramètres

- Récupérer les prix observés sur le marché des caplet (resp. des swaptions)
- Estimer le prix des caplet (resp. des swaptions) grâce à la formule fermée du G2++
- Par la méthode des moindres carrés, déterminer les cinq paramètres

Rappel : Il s'agit de minimiser la somme des résidus aux carrés.

Sommaire

- 1 Construction de courbe de taux
- 2 Typologies de modèles de taux
- 3 Un modèle de taux : le G2++
- 4 Mise en œuvre : G2++
 - Mise en œuvre
 - Création de deux processus corrélés
 - Discretisation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck
 - Modélisation du taux forward par la méthode NSS
 - Modélisation de la courbe de taux d'intérêt sous \mathcal{R}

4.1. Mise en œuvre

La mise en œuvre consiste à :

- générer deux processus gaussiens corrélés
- discrétisation de la dynamique des deux processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour le modéliser sous \mathcal{R}
- modélisation du taux forward par la méthode Nelson-Siegel-Svensson (déjà fait)

Puis nous modélisons la courbe de taux d'intérêt.

4.2. Création de deux processus corrélés

On sait que : $d\varepsilon_x(t)d\varepsilon_y(t) = \rho dt$.

Nous voulons générer un vecteur $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ où Σ est la matrice de variance-covariance de ε de forme :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Pour se faire, nous utilisons la **décomposition de Cholesky**.

4.2. Création de deux processus corrélés

Supposons que $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et les Z_i sont iid pour $i = 1, 2$. Soit une matrice de scalaires $C = (c_1, c_2)^T$, on a alors :

$$c_1 Z_1 + c_2 Z_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où $\sigma^2 = c_1^2 + c_2^2$. Si C est une matrice de dimension (2×1) et que $Z = (Z_1, Z_2)^T$ nous avons alors :

$$C^T Z \sim \mathcal{MN}(0, C^T C)$$

Au total, **notre souci est réduit à trouver C telle que $C^T C = \Sigma$** . Une méthode pour trouver rapidement C est la décomposition de Cholesky.

4.2. Création de deux processus corrélés

$$\Sigma = U^T D U$$

Où U est une matrice triangulaire supérieure, D est une matrice diagonale avec des éléments positifs sur la diagonale. On peut encore écrire :

$$\begin{aligned}\Sigma &= U^T D U \\ &= (U^T \sqrt{D}) (\sqrt{D} U) \\ &= (U \sqrt{D})^T (\sqrt{D} U)\end{aligned}$$

où $\sqrt{D} U = C$ et satisfait donc $\Sigma = C^T C$.

cf. Code \mathcal{R}

4.3. Discrétisation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soit le processus d'Orstein-Uhlenbeck suivant :

$$dX_t = -aX_t + \sigma dW_t$$

Définition : Un processus $(Z_{k\delta})_{k \in [1; \frac{T}{\delta}]}$ est une discrétisation exacte du processus X si $\forall \delta > 0, \forall k \in [1; \frac{T}{\delta}], Z_{k\delta} =_{loi} X_{k\delta}$.

Remarque : Un processus admet une discrétisation exacte dès lors que l'on peut résoudre explicitement l'équation différentielle stochastique qui lui est associé.

4.3. Discrétisation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Dans une première étape, trouvons la forme de X_t . On pose $Y_t = e^{-at}X_t$. En utilisant la **formule d'Itô**, on a :

$$\begin{aligned}dY_t &= -aY_t dt + e^{-at} dX_t + 0 \\ &= -aY_t dt + ae^{-at} X_t dt + \sigma e^{-at} dW_t \\ &= -aY_t dt + aY_t dt + \sigma e^{-at} dW_t \\ &= \sigma e^{-at} dW_t\end{aligned}$$

Or on sait que : $Y_t = e^{-at}X_t$ d'où :

$$de^{-at}X_t = \sigma e^{-at} dW_t$$

En résolvant l'équation différentielle stochastique, on a :

$$e^{at}X_t = X_0 + \int_0^t \sigma e^{as} dW_s$$

4.3. Discretisation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On a encore :

$$X_t = e^{-at} X_0 + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

On sait que :

$$\int_0^t e^{as} dW_s = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{ai} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sim \mathcal{N} \left(0, \frac{1 - e^{-2at}}{2a} \right)$$

Au total, par la définition de la discrétisation exacte, nous obtenons :

$$X_{t+\delta} = X_t e^{-a\delta} + \sigma \varepsilon \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta}}{2a}}$$

- $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- δ le pas de la discrétisation

4.3. Discretisation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

La discretisation des processus donne :

$$x_{t+1} = x_t e^{-a} + \varepsilon_{x,t} \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}$$
$$y_{t+1} = y_t e^{-b} + \varepsilon_{y,t} \eta \sqrt{\frac{1 - e^{-2b}}{2b}}$$

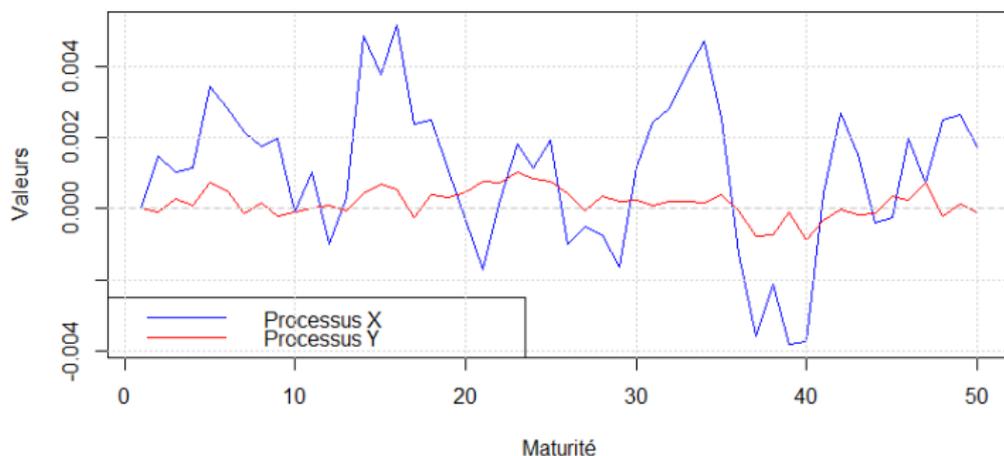
où

- $\varepsilon_{x,t}, \varepsilon_{y,t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- δ le pas de la discretisation

4.3. Discrétisation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

cf. Code R Etapes 1-2

Figure : Moyenne des processus d'Ornstein-Uhlenbeck

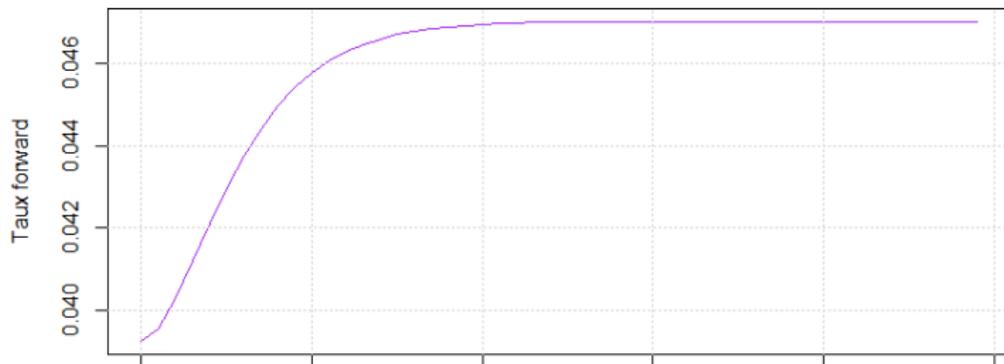


4.4. Modélisation du taux forward par la méthode NSS

Nous utilisons les taux d'intérêt provenant de la BCE pour estimer la courbe de taux forward.

cf. Code \mathcal{R} Etape 3

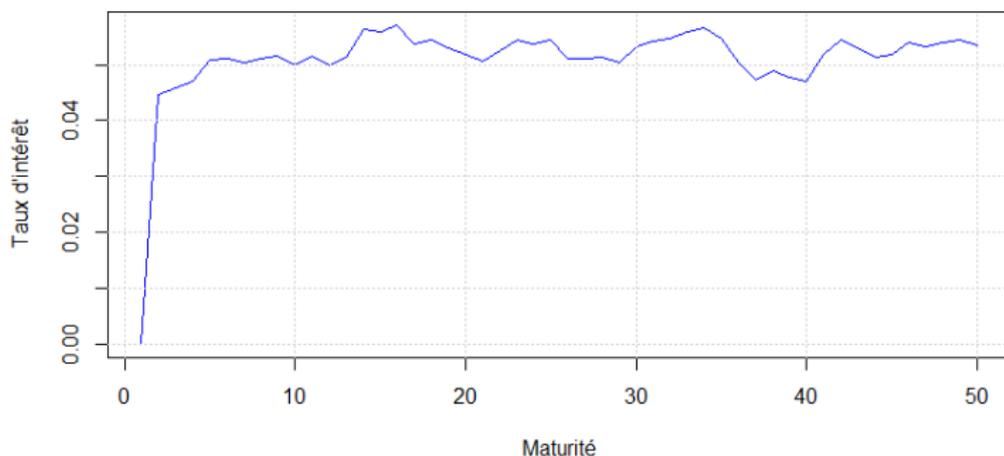
Figure : Taux forward par NSS



4.5. Modélisation de la courbe de taux d'intérêt sous \mathcal{R}

cf. Code \mathcal{R} Etape 4

Figure : Taux d'intérêt G2++



Références

- Brigo, D. and Mercurio, F. (2006). *Interest rate models - theory and practice*. Springer, 2 edition.
- Hull, J. (1997). *Options, futures and other derivatives, 3rd edition*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Musiela, M. and Rutkowski, M. (1998). *Martingale Methods in Financial Modeling*. Springer, Berlin.
- Planchet, F., Thérond, P., and Juillard, M. (2011). *Modèles financiers en assurance. Analyses de risque dynamiques, 2e édition*. Economica, Paris.
- Planchet, F., Thérond, P., and Kamega, A. (2009). *Scénarios économiques en assurance*. Economica, Paris.
- Roncalli, T. (1997). *La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique : application à la structure par terme française du 10 février 1994 au 30 août 1996*. PhD thesis, Université Montesquieu, Bordeaux IV.
- Smith, A. and Wilson, T. (2001). Fitting yield curves with long term constraints. Technical report, Bacon and Woodrow.