Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2010-2011 - Première session

17 janvier 2011 - Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.

Exercice n°1

Considérons un portefeuille d'assurés au sein duquel, les assurés produisent des sinistres dont la charge annuelle S est donnée par :

$$\Pr(S = x|\Theta = \theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}, x = 0, 1, ...$$

La répartition des profils de risques θ au sein du portefeuille est donnée par la densité :

$$u(\theta) \propto \theta^2 e^{-4\theta}, \theta > 0.$$

1. Calculer la prime collective.

2. Au cours des deux premières années, un assuré engendre des sinistres de charge annuelle $S_1 = 4$ et $S_2 = 1$, calculer la prime de crédibilité de cet assuré pour la troisième année.

Exercice n°2

Soit N_j le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à Θ, les N_j soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$\Pr(N_j = 1|\Theta = \theta) = 1 - \Pr(N_j = 0|\Theta = \theta) = \theta,$$

avec

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0,1, & \text{avec la probabilité 0,8 ;} \\ 0,2, & \text{avec la probabilité 0,2.} \end{array} \right\}$$

1. Si un assuré n'a déclaré aucun sinistre au cours des 3 premières années de couverture, estimez la probabilité qu'il cause 1 sinistre durant la quatrième année.

2. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par Θ, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(0; 1; 2)$. L'entrée se fait au niveau 1 puis :

- chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
- chaque sinistre est pénalisé par une remontée d'un niveau.

a. Donnez la matrice de transition sachant $\Theta = 0,1$.

b. En régime stationnaire, quelle est la répartition des assurés entre les trois degrés de l'échelle ?

c. Quelle prime relative associer aux différents échelons ?

Exercice n°3

Un actuaire doit tarifer un traité de réassurance en excédent de sinistre. Des études statistiques l'ont conduit à modéliser le coût des sinistres de montant supérieur à x_0 par des variables aléatoires de type Pareto

$$F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0.$$

1. Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.

2. Montrez que la famille des distributions Gamma est conjuguée à la famille des distributions Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 \; ; \; \theta > 0 \right\}.$$

Dans la suite, on se place dans le modèle Pareto-Gamma.

3. *A priori* $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$, quelle est la valeur espérée du paramètre si l'on ne dispose pas d'observation ?

4. Pour un contrat particulier, on a observé durant la première période un échantillon de n sinistres dépassant le montant x_0. Donnez l'estimateur bayesien de Θ pour ce contrat. Exprimez-le en fonction de l'e.m.v (lorsque l'on ne dispose pas d'information *a priori*) et de l'estimation *a priori* (lorsque l'on ne dispose pas d'observations). Commentez.

Rappel : Une variable aléatoire distribuée selon une loi Gamma de paramètre (γ, β) a pour densité $u(\theta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\theta^{\gamma-1}\exp(-\beta\theta)$.