Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2013-2014 - Première session
24 janvier 2014 - Durée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 ($\approx$ 7 points)

Un actuaire doit tarifer un traité de réassurance en excédent de sinistre. Des études statistiques l'ont conduit à modéliser le coût des sinistres de montant supérieur à x_0 par des variables aléatoires de type Pareto

$$F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0.$$

1. En vous fondant sur l'étude du coût moyen par sinistre à la charge du réassureur en fonction du niveau de la priorité, expliquez l'intérêt d'une telle modélisation dans ce contexte.

2. Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.

3. Montrez que la famille des distributions Gamma est conjuguée à la famille des distributions Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 \ ; \ \theta > 0\right\}.$$

Dans la suite, on se place dans le modèle Pareto-Gamma.

4. *A priori* $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$, quelle est la valeur espérée du paramètre si l'on ne dispose par d'observation ?

5. Pour un contrat particulier, on a observé durant la première période un échantillon de n sinistres dépassant le montant x_0. Donnez l'estimateur bayesien de Θ pour ce contrat. Exprimez-le en fonction de l'e.m.v (lorsque l'on ne dispose pas d'information *a priori*) et de l'estimation *a priori* (lorsque l'on ne dispose pas d'observations). Commentez.

Rappel Une variable aléatoire distribuée selon une loi Gamma de paramètre (γ, β) a pour densité $u(t) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} \exp(-\beta t), t \geq 0$.

Exercice 2 ($\approx$ 4 points) *Présenter sous forme d'un tableau.*

Dans le modèle de Bühlmann, avec les notations habituelles, donnez une interprétation de τ^2, σ^2 et μ_0. Déduisez-en le sens de variation de la prime de crédibilité en fonction de τ^2, σ^2 et le nombre de périodes d'observation n.

Exercice 3 ($\approx$ 9 points)

Soit N_j le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à $\Lambda\Theta$, les N_j soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre $\Lambda\Theta$, où :

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0,1, \text{ si l'assuré vit en zone rurale ;} \\ 0,2, \text{ si l'assuré vit en zone urbaine.} \end{array} \right\}$$

et

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{l} 0,5, \text{ avec la probabilité } 1/2 \text{ ;} \\ 1,5, \text{ avec la probabilité } 1/2. \end{array} \right\}$$

Les variables aléatoires Λ et Θ sont supposées indépendantes et le portefeuille est constitué de 3/5 d'assurés vivant en zone rurale et de 2/5 d'assurés vivant en zone urbaine. De plus, pour simplifier, on supposera les montants de sinistres égaux à 1.

1. Un assuré vivant en zone rurale arrive dans ce portefeuille, quelle prime lui sera réclamée ?

2. Trois années plus tard, cet assuré n'a pas déclaré de sinistre au cours de cette période. Quelle est la réévaluation de sa fréquence annuelle de sinistre au terme de ces 3 ans ?

3. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par Θ, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(1;2;3)$ destiné à s'appliquer à l'ensemble de la population couverte. L'entrée se fait au niveau 3 puis :
- chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
- au moindre sinistre, l'assuré est renvoyé au niveau 3.

a. Expliquez la problématique associée à la mise en place d'une échelle bonus-malus pour un portefeuille à la tarification segmentée (*moins de 5 lignes*).

b. Donnez la distribution stationnaire de l'échelle.

c. Déterminez les coefficients de réduction-majoration des primes r_1, r_2, r_3 selon la méthode de Norberg en régime stationnaire.