Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2012-2013 - Deuxième session
24 juin 2013 - Durée : 1 heures
Aucun document n'est autorisé.

Exercice

Considérons un portefeuille d'assurance dont on modélise l'hétérogénéité (non observée *a priori* par l'assureur) par la variable aléatoire Θ. Un assuré de profil de risque $\theta \in [0,1]$ produit un nombre de sinistres par an avec la distribution :

$$\Pr\left[N = k | \Theta = \theta\right] = \theta(1-\theta)^k, k \in \mathbb{N}.$$

Le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres et l'espérance mathématique du coût d'un sinistre est normalisée à 1.

1. Quelle est la prime individuelle correcte d'un assuré de profil de risque θ ?

2. Montrez que la famille des distributions bêta est conjuguée à la famille des distributions du nombre annuel de sinistres. Commentez.

Dans la suite on se place dans le modèle défini par la famille des distributions du nombre annuel de sinistres et sa famille de lois bêta.

3. Déterminez la prime collective.

On se place à présent après n années d'observations $(k_1, ..., k_n)$.

4. Déterminez la densité *a posteriori* de Θ.

5. Calculez la prime de Bayes pour la $(n+1)$-ème année.

6. Calculez la prime de Bühlmann $(n+1)$-ème année.

7. Comparez les primes de Bayes et de Bühlmann et commentez.

Annexe : loi Bêta

Distribution	Paramètres	Densité	Domaine
Bêta	$\alpha > 0, \beta > 0$	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$0 < x < 1$