Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2018-2019 - Première session (étudiants québécois)
21 décembre 2018 - Durée : 2 heures
Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Question de cours

Considérant les hypothèses (H1) et (H2) ci-dessous, trouvez le meilleur estimateur, linéaire en $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)'$, de $\mu(\Theta) = \mathrm{E}[X_{n+1}|\Theta]$.

— (H1) Les variables aléatoires X_j $(j = 1, ..., n)$ sont, conditionnellement à $\Theta = \theta$, indépendantes et identiquement distribuées selon une loi F_θ avec les moments conditionnels

$$\mu(\theta) = \mathrm{E}[X_j|\Theta = \theta],$$
$$\sigma^2(\theta) = \mathrm{Var}[X_j|\Theta = \theta].$$

— (H2) Θ est une variable aléatoire de distribution $U(\theta)$.

Problème

Considérons un portefeuille d'assurance dont on modélise l'hétérogénéité (non observée *a priori* par l'assureur) par la variable aléatoire Θ. Un assuré de profil de risque $\theta \in [0, 1]$ produit un nombre de sinistres par an avec la distribution :

$$\Pr[N = k|\Theta = \theta] = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

L'assureur estime que les profils de risque sont distribués selon une loi Gamma de paramètre (α, β), i.e.

$$u(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}, \theta \geq 0.$$

Le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres et l'espérance mathématique du coût d'un sinistre est normalisée à 1.

Partie I

1. Quelle est la prime individuelle correcte d'un assuré de profil de risque θ ?

2. Déterminez la prime collective.

3. Montrez que les familles de distribution poisson et gamma sont conjuguées.

On se place à présent après n années d'observations $(k_1, ..., k_n)$.

4. Déterminez la densité *a posteriori* de Θ.

5. Calculez la prime de Bayes pour la $(n+1)$-ème année.

6. Calculez la prime de Bühlmann $(n+1)$-ème année.

7. Comparez les primes de Bayes et de Bühlmann et commentez.

Partie II

L'assureur souhaite mettre en place une échelle bonus-malus à trois degrés (numérotés 1 à 3) avec le fonctionnement suivant :

— une année sans sinistre fait descendre d'un degré dans l'échelle,
— chaque sinistre au cours d'une année fait remonter d'un niveau pour l'année suivante.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours d'un assuré de profil de risque θ dans l'échelle.

2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne.

3. Quel est son temps d'atteinte ?

4. Donnez la distribution stationnaire du portefeuille.

5. Quelles primes relatives proposeriez-vous d'associer aux trois degrés de l'échelle en utilisant la méthode de Norberg ?

6. Calculez l'élasticité de la prime en régime stationnaire pour un assuré de profil de risque θ (*question pour un bonus*).

Annexe : Fonctions Bêta et Gamma

On rappelle les définitions des fonctions Bêta et Gamma :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt,$$

et la propriété :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$