Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2019-2020 - Première session
24 janvier 2020 - Durée : 2 heures
Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Problème

Considérons le système bonus-malus avec le fonctionnement suivant :

— un sinistre ou plus au cours de l'année conduit à payer une prime c l'année suivante ;
— pas de sinistre au cours de l'année et un sinistre ou plus l'année précédente conduit à payer c pour l'année suivante ;
— pas de sinistre les deux dernières années conduit à payer a l'année suivante.

Dans tout l'exercice, le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres causé par un assuré.

Considérons un assuré qui produit un nombre de sinistres annuel selon une loi de Poisson de paramètre θ.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours de cet assuré dans l'échelle bonus-malus.

2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne.

3. Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?

4. Quelle est la valeur espérée de la prime en régime stationnaire ? Commentez.

5. Mesurez l'élasticité de l'échelle.

6. Supposons que cet assuré n'a pas eu de sinistre au cours des deux précédentes années. En se rendant au réveillon du jour de l'an, il cause un sinistre le 31 décembre à 23h59. Il n'avait précédemment pas causé de sinistre au cours de l'année. À partir de quel montant de sinistre a-t-il intérêt à déclarer le sinistre à son assureur (on supposera que l'assuré connaît son profil de risque θ et qu'il raisonne avec une actualisation nulle) ?

Question de cours

Avec les notations habituelles du cours, montrez que l'estimateur de Bayes $\widetilde{\mu(\Theta)} = \mathrm{E}\left[\mu(\Theta)|\mathbf{X}\right]$ est le meilleur estimateur de $\mu(\Theta)$, au regard du critère de l'erreur quadratique moyenne.

Exercice 1

Considérons un assuré dont le nombre annuel de sinistres est distribué selon une loi de Poisson de paramètre Θ. Les montants de sinistres sont constants. La distribution *a priori* de Θ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

1. Donnez la prime de Bayes de cet assuré.

2. Lors de la première année d'observation, l'assuré n'a pas causé de sinistre. Quelle prime lui réclameriez-vous pour la seconde année ?

3. Utilisez le modèle de Bühlmann pour estimer le nombre de sinistres espéré que va engendrer cet assuré pour la deuxième année.

4. Comparez les résultats des questions 2. et 3. et commentez

Exercice 2

Considérons la famille des distributions Pareto :

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 \;;\; \theta > 0 \right\}.$$

Déterminez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.