# Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2009-2010 - Première session

28 avril 2010 - Durée : 2 heures

**Aucun document n'est autorisé.**

## Exercice n°1

Un portefeuille d'assurance est composé de 25% de bons risques, 60% de risques moyens et de 15% de mauvais risques. Tous les risques ont une distribution de sinistres de type gamma, mais dont les paramètres diffèrent selon le tableau ci-dessous.

| Type de risque | $\gamma$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| Bon | 4 | 2 |
| Moyen | 4 | 1 |
| Mauvais | 10 | 2 |

1. Donner la prime collective de ce portefeuille.

Le dossier de sinistre d'un risque pris au hasard est de 1 et 2 au cours des deux premières années.

2. Calculer la prime bayesienne de ce risque pour la troisième année.

3. Calculer la prime de crédibilité de ce risque pour la troisième année selon le modèle de Bühlmann.

## Exercice n°2

Une société d'assurance couvre deux contrats depuis 3 ans. Elle dispose des montants annuels de sinistres suivants. Selon le modèle de Bühlmann, quelles primes réclameriez-vous à ces deux assurés pour la $4^e$ année ?

| Contrat | Année 1 | Année 2 | Année 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 8 | 11 |
| 2 | 11 | 13 | 12 |

## Exercice n°3

Soit $N_j$ le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à $\Theta$, les $N_j$ soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$\Pr(N_j = 1|\Theta = \theta) = 1 - \Pr(N_j = 0|\Theta = \theta) = \theta,$$

avec

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0,1, & \text{avec la probabilité 0,75 ;} \\ 0,2, & \text{avec la probabilité 0,25.} \end{array} \right\}$$

1. Si un assuré n'a déclaré aucun sinistre au cours des 3 premières années de couverture, estimez la probabilité qu'il cause 1 sinistre durant la quatrième année.

2. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par $\Theta$, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(0; 1; 2)$. L'entrée se fait au niveau 1 puis :
- chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
- chaque sinistre est pénalisé par une remontée au niveau 2.

a. Donnez la matrice de transition sachant $\Theta = 0,1$.

b. En régime stationnaire, quelle est la répartition des assurés entre les trois degrés de l'échelle ?

c. Quelle prime relative associer aux différents échelons ?

## Exercice n°4

Considérons la famille des distributions géométriques

$$\mathcal{F} = \{f_\theta(x) = (1-\theta)^x \theta, x \in \mathbf{N}; \theta \in [0; 1]\}.$$

Trouvez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.

**Quelques rappels :**

- Estimateurs des paramètres de structure dans le modèle de Bühlmann :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{I(n-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2,$$

$$\widehat{\tau^2} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{\widehat{\sigma^2}}{n};$$

- Si $Y \sim Gamma(\gamma, \beta)$, alors $\mathrm{E}[Y] = \frac{\gamma}{\beta}$ et $\mathrm{Var}[Y] = \frac{\gamma}{\beta^2}$.

- Une loi Gamma de paramètres $\gamma$ et $\beta$ a pour densité

$$u(\theta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \theta^{\gamma-1} e^{-\beta\theta}, \text{ pour } \theta \geq 0.$$

- La famille $\mathcal{U}$ est conjuguée à la famille $\mathcal{F}$ si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour toute réalisation $\mathbf{x}$ du vecteur des observations $\mathbf{X}$, il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que $U_\gamma(\theta | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = U_{\gamma'}(\theta), \quad$ pour tout $\theta \in \Theta$.