# Crédibilité - Systèmes bonus-malus

**Année universitaire 2012-2013 - Première session (étudiants québecois)**
**11 janvier 2013 - Durée : 2 heures**
**Aucun document n'est autorisé.**

### Exercice n° 1

Soit $N_j$ le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à $\Theta$, les $N_j$ soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$\Pr(N_j = 1|\Theta = \theta) = 1 - \Pr(N_j = 0|\Theta = \theta) = \theta,$$

avec

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{l} 0,1, \text{ avec la probabilité } 0{,}75\,; \\ 0,2, \text{ avec la probabilité } 0{,}25. \end{array} \right\}$$

1. Quelle est la fréquence moyenne de sinistres dans ce portefeuille ?

2. Si un assuré n'a déclaré aucun sinistre au cours des 2 premières années de couverture, estimez la probabilité qu'il cause 1 sinistre durant la quatrième année.

Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par $\Theta$, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(0; 1; 2)$. L'entrée se fait au niveau 1 puis :
- chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
- chaque sinistre est pénalisé par une remontée au niveau 2.

3. Donnez la matrice de transition pour les assurés de profil de risque $\Theta = 0,1$.

3. En régime stationnaire, au niveau du portefeuille, quelle est la répartition des assurés entre les trois degrés de l'échelle ?

4. Quelle prime relative associer aux différents niveaux du système bonus-malus ?

**Exercice n° 2**

Dans le modèle de Bühlmann, avec les notations habituelles, donnez une interprétation de $\tau^2$, $\sigma^2$ et $\mu_0$. Déduisez-en le sens de variation de la prime de crédibilité en fonction de $\tau^2$, $\sigma^2$ et le nombre de périodes d'observation $n$. *N.B. : Présenter ces éléments sous forme d'un tableau synthétique.*

**Exercice n° 3**

Considérons un portefeuille d'assurance dont on modélise l'hétérogénéité (non observée *a priori* par l'assureur) par la variable aléatoire $\Theta$. Un assuré de profil de risque $\theta \in [0, 1]$ produit un nombre de sinistres par an avec la distribution :

$$\Pr[N = k | \Theta = \theta] = \theta(1-\theta)^k, k \in \mathbf{N}.$$

Le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres et l'espérance mathématique du coût d'un sinistre est normalisée à 1.

1. Quelle est la prime individuelle correcte d'un assuré de profil de risque $\theta$ ?

2. Ne disposant pas d'information supplémentaire sur la distribution des profils de risque dans le portefeuille, déterminez la famille de lois conjuguée à la famille des distributions du nombre annuel de sinistres.

Dans la suite on se place dans le modèle défini par la famille des distributions du nombre annuel de sinistres et sa famille de lois conjuguées déterminée à la question 2.

3. Déterminez la prime collective.

On se place à présent après $n$ années d'observations $(k_1, ..., k_n)$.

4. Déterminez la densité *a posteriori* de $\Theta$.

5. Calculez la prime de Bayes pour la $(n + 1)$-ème année.

6. Calculez la prime de Bühlmann $(n + 1)$-ème année.

7. Comparez les primes de Bayes et de Bühlmann et commentez.

**Annexe :** Paramétrisation des lois de probabilité