Exercices en **théorie** de la **crédibilité**

Avec solutions

Exercices en **théorie** de la **crédibilité**

Avec solutions

Hélène Cossette
Vincent Goulet

École d’actuariat, Université Laval

Seconde édition révisée

Historique de publication

Janvier 2006 : Première version préliminaire
Janvier 2007 : Première édition
Janvier 2008 : Seconde édition
Janvier 2010 : Seconde édition révisée

Code source
Le code source LaTeX de ce document est disponible à l'adresse

http://vgoulet.act.ulaval.ca/credibilite/

ou en communiquant directement avec les auteurs.

ISBN 978-2-9809136-9-3
Dépôt légal – Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2008
Dépôt légal – Bibliothèque et Archives Canada, 2008

Introduction

Ce document est le fruit de la mise en commun d'exercices colligés au fil du temps pour nos cours de théorie de la crédibilité à l'Université Laval et à l'Université Concordia. Nous ne sommes toutefois pas les uniques auteurs des exercices ; certains ont, en effet, été rédigés par les Docteurs François Dufresne et Jacques Rioux, entre autres. Quelques exercices proviennent également d'anciens examens de la Society of Actuaries et de la Casualty Actuarial Society.

C'est d'ailleurs afin de ne pas usurper de droits d'auteur que ce document est publié selon les termes du contrat Paternité-Partage des conditions initiales à l'identique 2.5 Canada de Creative Commons. Il s'agit donc d'un document «libre» que quiconque peut réutiliser et modifier à sa guise, à condition que le nouveau document soit publié avec le même contrat.

Le premier chapitre, tiré de Goulet (1994), trace l'historique et l'évolution de la théorie de la crédibilité, de ses origines jusqu'au début des années 1990. Les chapitres 2 à 5 — qui correspondent aux chapitres de notre cours — sont quant à eux uniquement constitués d'exercices. Dans cette seconde édition, les réponses des exercices se trouvent à la fin des chapitres, alors que les solutions complètes se trouvent à l'annexe D. De plus, à la fin de chaque chapitre d'exercices, on trouvera une liste d'exercices suggérés dans Klugman et collab. (2004, 2008).

Un tableau synoptique des principaux résultats de crédibilité exacte se trouve à l'annexe A. L'annexe B, présente la paramétrisation des lois de probabilité utilisée dans les exercices. En cas de doute, le lecteur est invité à la consulter. Il y trouvera également l'espérance, la variance et la fonction génératrice des moments (lorsqu'elle existe) des lois de probabilités rencontrées dans ce document. Enfin, l'annexe C contient un tableau des quantiles de la loi normale

Nous tenons à remercier M. Mathieu Pigeon pour sa précieuse collaboration lors de la préparation de ce document, ainsi que tous les auxiliaires d'enseignement ayant, au fil des années, contribué à la rédaction d'exercices et de solutions.

Hélène Cossette <helene.cossette@act.ulaval.ca>
Vincent Goulet <vincent.goulet@act.ulaval.ca>
Québec, décembre 2007

Table des matières

1 Historique et évolution de la théorie de la crédibilité

Ce chapitre est une version révisée du chapitre 1 de Goulet (1994)

La personne qui mentionne qu'elle étudie «la crédibilité» obtient habituellement de grands yeux incrédules et interrogateurs comme seule réponse de la part de son interlocuteur, fut-il même parfois actuaire. Pour l'actuaire la crédibilité n'est souvent qu'un vague concept parmi tant d'autres rencontrés au fil des examens professionnels, concept qui eut tôt fait de fuir à toutes jambes sa mémoire une fois l'examen réussi. Quant au non actuaire, l'étude de la crédibilité ne lui apparaît d'aucun intérêt puisqu'il n'applique habituellement la notion qu'aux personnes physiques : le juge est crédible lorsqu'il interprète la loi, certains critiques de cinéma sont crédibles alors que d'autres le sont moins, nul politicien n'est considéré crédible... Pourtant, la définition que donne le *Petit Robert* du mot crédibilité, «ce qui fait qu'une chose mérite d'être crue ; caractère de ce qui est croyable», est assez vaste pour laisser place à d'autres interprétations.

La population accorde donc de la crédibilité aux gens, et ce selon leur notoriété, leurs réalisations, du fait d'expériences concluantes, de leur honnêteté et leur droiture reconnues ou tout simplement par affinité. En fin de compte, une personne est crédible à nos yeux s'il est *probable* que ce qu'elle dit ou fait se réalise ou soit un succès. Par exemple, il est fort probable que l'interprétation que le juge fait de la loi soit la bonne ; ou j'irai voir le nouveau film à l'affiche louangé par tel critique car je sais qu'il est probable que je l'aime moi aussi.

On voit donc qu'il existe une étroite relation entre les notions de «probabilité» et de «crédibilité». C'est pour cette raison qu'avant d'aborder l'historique de la théorie actuarielle de la crédibilité, il s'avérera intéressant d'étudier l'évolution de l'approche probabiliste privilégiée en actuariat, l'approche bayesienne. Avec en plus l'étude des réflexions sur le sujet du philosophe anglais Bertrand Russell le lien entre les deux notions se clarifiera et la perspective historique n'en sera que meilleure.

1.1 L'émergence de l'approche bayesienne

Bien que Thomas Bayes eut présenté son fameux théorème dans un essai en 1763, ce n'est que dans la seconde moitié des années 1950 que la philosophie probabiliste basée sur ce théorème gagne suffisamment d'adeptes, et donc de popularité, pour aspirer au respect. L'approche classique monopolisait auparavant la foi des probabilistes et statisticiens, et c'est encore aujourd'hui la philosophie enseignée en premier lieu dans les écoles.

Le statisticien classique[1] a une vision très stricte, objective et mathématique de la probabilité et de l'usage qu'il est possible d'en faire pour inférer un résultat à partir de données. Pour lui, une probabilité est essentiellement la limite d'une série de fréquences relatives où la symétrie joue un rôle primordial : si un événement peut connaître n réalisations différentes mutuellement exclusives et ayant une chance égale de se réaliser, et si de ces réalisations m ont l'attribut A, alors la probabilité de A est m/n. Des énoncés du type «il est probable que le Québec devienne indépendant au cours des deux prochaines années» ou «il est probable qu'il neige demain» n'ont donc aucun sens à ses yeux. D'ailleurs, les statisticiens classiques croient que leur travail se limite exclusivement à l'analyse des données et qu'il ne leur appartient pas de prendre des décisions à la lumière des résultats obtenus. Il sera expliqué plus loin que, par opposition, les bayesiens voient en la prise de décision le but de tout travail statistique.

Un autre élément majeur qui caractérise l'approche classique — et c'est celui qui concerne particulièrement la théorie de la crédibilité — est l'absence de prise en compte de toute information a priori relative au problème étudié. On préfère «laisser les données parler d'elles-mêmes». C'est ce qui fut à l'origine de la contestation devant mener à l'émergence de l'approche bayesienne.

Leonard J. Savage publie en 1954 (Savage, 1954) un des premiers livres consacrés à l'étude de la statistique dans une optique bayesienne. Il défend alors la vision individualiste de la probabilité (*personalistic view of probability*) qu'il qualifie de «seul concept de probabilité». Comme son nom l'indique, cette vision tâche de se rapprocher le plus possible du raisonnement humain. La probabilité devient donc un indicateur de l'opinion d'une personne à propos d'un événement et, puisqu'une opinion est — habituellement ! — sujette à changement suite à l'ajout d'informations, l'inférence statistique à partir de nouvelles données constitue alors le mécanisme de révision de l'opinion. De plus, l'adhérant à cette vision refuse obstinément de rejeter toute information parallèle ou a priori au problème sous prétexte que, justement, l'humain tire profit de ces informations lorsqu'il prend une décision. Si la question «quel degré de conviction puis-je atteindre à la suite de l'ajout de cette information ?» est hors du champ de la statistique pour le statisticien classique, elle est au contraire au cœur même du problème pour l'individualiste. Ce dernier répond d'ailleurs à la question en utilisant le théorème de Bayes — d'où le qualificatif de bayesien. Cet algorithme donne la nouvelle probabilité d'un événement A à partir de sa probabilité originale et des nouveaux faits marquants venant s'y rattacher. Ainsi, si B constitue l'ensemble des nouveaux

1. Souvent appelé *objectivist* en anglais. L'expression est toutefois difficile à traduire adéquatement en français et c'est pourquoi usage on utilisera le terme «classique»

faits, alors

$$P[A|B] = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]},$$

où $P[A]$ est la probabilité a priori que l'événement A se réalise.

De plus, les bayesiens évitent l'apparente contradiction entre l'objectivité scientifique et l'irrationalité humaine en postulant un individu idéal, conséquent dans ses décisions. Par exemple, cet individu, lorsque confronté à un choix, choisira toujours l'option la plus probable.

Savage donne dans son ouvrage *The foundations of statistics* (1954) quelques expressions synonymes, qu'il est sans doute préférable de ne pas traduire, pour *personal probability*. Ce sont *subjective probability, psychological probability* et finalement *degree of conviction*. Le lecteur est invité à conserver tout particulièrement en mémoire la dernière expression. En effet, la section suivante étudie sommairement les travaux du philosophe Bertrand Russell et il sera intéressant de constater à quel point les travaux de deux disciplines différentes ont su converger.

1.2 Les réflexions de Russell

Lord Bertrand Russell (1872-1970) est un éminent philosophe et logicien britannique, pacifiste invétéré et dont l'activité la plus marquante se rapporta aux mathématiques et à la logique. Il est entre autres le fondateur du logicisme, doctrine selon laquelle «les mathématiques seraient soumises à la formalisation de la logique et s'y réduiraient» (*Le Petit Larousse*).Il fut récipiendaire du Prix Nobel de littérature en 1950.

Joseph Butler (1692–1752) disait : «la probabilité est le guide de la vie d'une personne». En effet, il est raisonnable de croire que lorsque deux événements ou plus ont des chances de se réaliser, la décision d'une personne sera basée sur celui qui se réalisera avec la plus forte probabilité. Mais ce type de probabilité est-il le même que dans l'énoncé : «la probabilité d'obtenir un double six au lancer de deux dés est de un sur trente-six» ? Russell soutient que non. Voici son raisonnement, que l'ont peut retrouver de façon plus exhaustive dans son ouvrage de 1948 (Russell, 1948).

De toute évidence, cette dernière est la probabilité dite *mathématique*, obéissant aux axiomes de la théorie des probabilités, que l'ont peut grossièrement réduire au quotient de deux nombres : le cardinal d'une classe spécifique (double six) et celui d'une classe fondamentale (les réalisations possibles du lancer de deux dés). Elle s'attarde aux énoncés d'ordre général, se référant à des classes «anonymes». Un autre exemple serait, en assurance-vie : «la probabilité qu'un homme non-fumeur âgé de 30 ans décède dans l'année qui vient est, selon la table CSO 1958, de 0,00213». Jamais dans ces deux exemples il n'est fait référence à une personne ou un objet en particulier.

Cependant, en passant à un cas particulier du genre «la probabilité que je vive jusqu'à 90 ans est de 60 %», est-on toujours dans le domaine de la probabilité mathématique ? Au passage d'un cas général à un cas particulier (et en ne considérant pas le cas particulier comme une simple réalisation du phénomène général), une personne devrait être en mesure d'intégrer *tous* les éléments d'importance à sa prise de décision. Cette masse d'information lui permettrait alors de savoir avec certitude si oui ou non sa longévité atteindra les 90 ans. Et dès lors elle se retrouverait hors du champ de la probabilité.

Bien entendu, il est pour ainsi dire impossible d'atteindre un tel niveau de certitude. C'est pourquoi la probabilité demeure le guide de la vie de la personne, parce que *son devoir s'avère insuffisant*. Mais encore, si ce guide est la probabilité mathématique, il doit être possible de calculer et d'identifier *la* probabilité (c'est-à-dire *la* classe fondamentale), sinon le guide fait faux bon à son utilisateur ! La personne en quête de cette probabilité évaluera donc d'abord elle-même ses chances de vivre jusqu'à 90 ans, puis ira probablement consulter un médecin, ou même une voyante, qui chacun lui donnera son avis, pas nécessairement objectif. Cette personne ne pourra que croire en totalité ou en partie les divers jugements colligés, aussi lorsqu'il affirmera «la probabilité que je vive jusqu'à 90 ans est de 60 %», il attribuera en réalité une *crédibilité* de 60 % à l'expression «je vais vivre jusqu'à 90 ans». C'est le mieux qu'il pourra faire, tout le savoir de l'humain comportant une part de doute ou, à l'inverse, seulement un *degré de crédibilité*.

Crédibilité, voilà donc le nom qu'attribue Russell à ce second type de probabilité, la distinction entre la probabilité mathématique et la crédibilité se faisait au *passage du général au particulier*. Une relation subsiste néanmoins entre les deux notions, et c'est que la probabilité mathématique est un instrument de mesure de la crédibilité. De plus, toujours selon Russell, tout énoncé comporte un degré de crédibilité intrinsèque, si minime soit-il, car une personne a toujours un certain bagage de connaissances lui permettant de se faire une opinion a priori. Finalement, la crédibilité peut être augmentée par l'ajout d'information, le gain marginal allant en décroissant.

Cette théorie de Bertrand Russell date de 1948 (ou du moins sa publication). L'énoncé sommaire ci-dessus suffit pour constater à quel point cette théorie est près de l'approche bayesienne en statistique qui commençait alors à sortir de l'anonymat. Cela n'est pas surprenant si l'on se rappelle que les fondateurs de l'école bayesienne ont, comme des philosophes le font, basé leur théorie sur le comportement humain. Ainsi, ce que Russell nomme probabilité mathématique correspond en fait à l'approche classique en statistique et il ne la considère pas comme un fin en soi, mais bien comme un outil pour une prise de décision. C'est cette prise de décision, via la détermination d'un degré de crédibilité, qui constitue la fin de l'utilisation de la probabilité (ou de la statistique). D'ailleurs, l'expression *degree of conviction* proposée par Savage n'est-elle pas synonyme de celle de Russell, degré de crédibilité ?

Cependant, là où le philosophe fortifie le plus la thèse bayesienne, c'est lorsqu'il soutient que tout énoncé comporte un degré de crédibilité intrinsèque car, ce faisant, il défend l'apport non négligeable de l'information a priori.

1.3 Et les actuaires dans tout ça ?

Longtemps avant l'apparition de l'approche bayesienne ou même les théories de Russell, l'information a priori était prise en compte par les actuaires. En effet, lorsqu'ils évaluaient une prime, jamais ils n'auraient considéré ne *rien* connaître du risque. À partir de différents critères, ils arrivaient au moins à le regrouper avec d'autres risques semblables. Toutefois, le mécanisme de prise en compte de cette information était souvent ad hoc et mal compris à la fois par les actuaires et les statisticiens. C'était la crédibilité.

Si la crédibilité a su se développer et faire le bonheur de ses utilisateurs pendant de nombreuses années sans les bases statistiques de l'approche bayesienne, il n'en demeure pas moins que l'arrivée de celle-ci marqua un virage important dans l'évolution de la crédibilité, contribuant d'ailleurs à en faire davantage une théorie. Les lignes suivantes tâcheront de retracer l'évolution historique de la théorie de la crédibilité, de ses balbutiements aux débuts du siècle à son adolescence actuelle, tout en faisant le lien avec les théories présentées plus haut.

La petite histoire suivante, inventée par le Dr François Dufresne pour un cours d'introduction à la théorie de la crédibilité à l'Université Laval, illustre sans doute bien comment cette théorie a pu voir le jour.

Vers les années 1910, aux États-Unis, la multinationale General Motors et le petit constructeur indépendant Tucker sont assurés chez Allstate contre les accidents de travail (*workers compensation*), avec quelques autres fabricants d'automobiles. Un taux moyen est calculé à partir de l'expérience de l'ensemble de ces fabricants et c'est ce taux qui est chargé à chacun. Or, la GM calcule elle-même son taux et s'aperçoit qu'il serait, année après année, inférieur à celui qu'on lui charge et ce, grâce à une expérience meilleure que celle du groupe. Exaspérée par une telle situation, elle demande à Allstate qu'on lui charge son propre taux, ceci sous prétexte que son nombre d'employés important est un gage de stabilité de l'expérience entre les années.

Les actuaires de Allstate sont intuitivement d'accord avec l'argumentation de GM, aussi s'apprêtent-ils à accéder à sa demande. Un petit problème les fait cependant hésiter : si le nombre d'employés de GM est clairement assez gros pour que l'on se fie à son expérience et celui de Tucker trop petit pour faire de même, où fixera-t-on la limite entre un nombre d'employés fiable et un non fiable ?

Il est généralement reconnu que le premier actuaire à avoir proposé une solution au problème dans la littérature est Arthur H. Mowbray, dans le premier numéro, des Proceedings de la Casualty Actuarial Society, en 1914 (Mowbray, 1914). En supposant connue la probabilité q qu'un accident survienne, il désire calculer le nombre minimal d'employés assurés n de telle sorte que la probabilité que le nombre d'accidents ne s'éloigne pas de plus de $100k$ % de la moyenne (ou du mode[2]) soit supérieure à $100p$ %. Si l'on

2. Mowbray privilégie la valeur la plus fréquente, le mode, mais s'en remet à la moyenne par simplicité et sous prétexte que ces deux valeurs sont presque égales.

note N la distribution du nombre d'accidents, alors l'énoncé précédent s'écrit en langage mathématique

$$P\left[(1-k)E[N] \leq N \leq (1+k)E[N]\right] \geq p,$$

où $N \sim \text{Binomiale}(n, q)$. Par la suite, l'utilisation de l'approximation normale pour la distribution de N permet d'éviter l'arbitrage entre le mode et la moyenne et d'obtenir aisément une réponse.

Les bases de la crédibilité de stabilité, ou *limited fluctuations*, étaient dès lors posées.

La solution de Mowbray était intéressante car appuyée par des arguments probabilistes. Elle connut d'ailleurs de multiples adaptations qui lui permirent de rester d'actualité jusqu'à nos jours. Moyennant la détermination d'une distribution pour le nombre de sinistres, les praticiens pouvaient désormais résoudre par un calcul simple le problème auquel ils faisaient face : fixer un seuil d'admissibilité à la pleine crédibilité.

Les assurés eurent cependant tôt fait de soumettre un autre problème aux actuaires. Telle que présentée jusqu'à maintenant, la théorie de la crédibilité n'admettait que deux niveaux : 0 et 1. Or, cette situation pouvait se traduire, pour un employeur situé tout juste sous le seuil d'admissibilité, en une différence significative dans la prime à payer. De plus, la notion même de pleine crédibilité ne ralliait pas l'ensemble des actuaires, certains croyant que jamais les données ne sont fiables à 100%.

C'est pour répondre à ces critiques que fut introduit le concept de crédibilité partielle, dont on attribue la première véritable théorie sur le sujet à Whitney (1918). Dès 1918 donc, Whitney mentionne la «nécessité, par souci d'équité pour l'assuré, de pondérer d'un côté l'expérience collective et de l'autre l'expérience individuelle». L'essence de la crédibilité consistait à calculer cette pondération.

À au moins deux reprises dans l'histoire, la crédibilité de précision (*greatest accuracy*) a eu la chance de s'imposer avant la contribution de Bühlmann en 1967. La première se trouve dans les travaux de Whitney. Dans son article, ce dernier retient quatre éléments qui influenceront la pondération à donner à l'expérience individuelle : l'exposition, le niveau de risque, la crédibilité de la prime collective et l'homogénéité du groupe. D'ailleurs, il mentionne :

> «Il n'y aurait pas de problème d'*experience rating* si chaque risque dans le groupe était typique du groupe, car dans ce cas les variations dans l'expérience ne seraient que purement aléatoires.» (Traduction libre)

Or, la notion d'homogénéité du collectif est au cœur même de la crédibilité de précision. Whitney modélise l'hétérogénéité du collectif en supposant que les moyennes des divers risques sont distribuées selon une loi normale. De là, par un développement mathématique lourd et laborieux, il obtient une expression pour la prime individuelle (P) de la forme

$$P = zX + (1-z)C,$$

où X est l'expérience individuelle et C l'expérience collective. Ces valeurs sont pondérées par le facteur de crédibilité, z, dont Whitney obtient une formule de la forme $n/(n+K)$. K n'est alors pas une constante arbitraire, mais bien une expression explicite dépendant des divers paramètres du modèle. Par souci de simplicité, Whitney suggère cependant de fixer K comme une constante à déterminer au jugement de manière à éviter les trop grandes fluctuations entre la prime individuelle et la prime collective. Ce faisant, il s'écarte d'une conception de la crédibilité visant la précision pour encourager plutôt celle visant la stabilité. La crédibilité de précision meurt dans l'œuf à cause de considérations d'ordre pratique.

Whitney fut de plus critiqué par Fisher (1919) pour avoir utilisé une méthode jugée hérétique à l'époque en statistique, la règle de Bayes. Fischer cite d'ailleurs quelques personnes faisant autorité s'étant prononcées contre l'usage de cette règle. En fait, Whitney utilise la version la plus simple de la règle, celle même proposée par Bayes [3], qui suppose qu'a priori tous les événements ont une chance égale de se réaliser. Cette modélisation était appelée par ses adeptes le «Principe de la raison insuffisante» et par ses détracteurs «L'hypothèse de distribution uniforme de l'ignorance» [4]. Dans le développement de Whitney, cela revient à supposer que toutes les valeurs possibles pour la moyenne du groupe sont équiprobables. Les réserves de Fischer sur ce point étaient donc justifiées...

Il est difficile aujourd'hui de mesurer l'impact que la volte-face de Whitney en faveur des arguments de stabilité a pu avoir sur la pratique de la crédibilité. Toujours est-il que les actuaires ont utilisé intensivement pendant un demi-siècle la forme $z = n/(n+K)$ pour calculer des facteurs de crédibilité basés essentiellement sur la stabilité. Encore aujourd'hui, c'est l'approche privilégiée aux États-Unis. Pourtant, si les pratiques se sont quelque peu figées, la théorie, elle, n'a pas cessé d'évoluer.

L'approche de précision tente à nouveau sa chance par l'entremise de Arthur L. Bailey, et ce à deux reprises (Bailey (1945) et Bailey (1950)). En 1945 d'abord, Bailey obtient une expression pour la crédibilité dans ce qui semble être l'univers non paramétrique exploré plus tard par Bühlmann. Seulement, une notation confuse rend le texte difficilement déchiffrable et le condamne à la marginalité.

L'article de 1950 avait, lui, davantage le potentiel pour ébranler les acquis en théorie de la crédibilité. Bailey débute son article en relevant les confrontations historiques entre statisticiens et actuaires au sujet de la crédibilité. On apprend alors qu'il y a plus de trente ans, la polémique au sujet de la crédibilité était la même que de nos jours : les statisticiens «purs» crient au scandale, estimant les méthodes actuarielles contraires à toute théorie statistique, et les actuaires leur répondent que «peut-être, mais ça fonctionne !» Le point majeur de discorde est l'utilisation par les actuaires de la règle de Bayes. Ainsi, Bailey (1950) écrit :

3. Selon Bailey (1950).
4. *Principe of insufficient reason* et *Assumption of the equal distribution of ignorance.*

> «Présentement, presque toutes les méthodes d'estimation présentées dans les livres de méthode statistiques ou enseignées dans les universités américaines sont basées sur un équivalent de l'hypothèse selon laquelle toute information parallèle ou connaissance a priori est inutile. (...) Des philosophes [Russell] ont récemment étudié la crédibilité à accorder à divers éléments de savoir, remettant par conséquent en doute la philosophie adoptée par les statisticiens. Par contre, il semble que ce ne soit que dans le domaine de l'actuariat qu'on ait assisté à une réelle révolte contre la mise de côté de tout savoir a priori au moment d'estimer une quantité à l'aide de nouvelles données.» (Traduction libre)

Bailey se prononce donc clairement en faveur de la philosophie bayesienne. Il semble même qu'il fut le premier à en défendre si énergiquement la pertinence dans le processus de tarification. Mais ceci, fait-il remarquer, à condition d'utiliser une généralisation de la règle de Bayes, faite par Laplace en 1820, de manière à éviter le controversé «Principe de la raison insuffisante». Cette généralisation rend la règle de Bayes applicable même si les événements n'ont pas a priori une chance égale de se réaliser.

À partir de ces prémisses, Bailey démontre qu'en minimisant l'erreur quadratique dans un contexte bayesien, l'estimateur obtenu est une fonction linéaire des observations [5] qui correspond exactement à la prime de crédibilité, et ce pour les combinaisons de distributions binomiale/bêta, Poisson/gamma et normale/normale. Il est possible d'en déduire un facteur de crédibilité encore une fois de la forme $z = n/(n+K)$ où K est une combinaison des paramètres du modèle. Contrairement à Whitney, Bailey ne propose pas d'évaluer K au jugement, mais bien de s'en tenir à l'expression développée algébriquement.

De plus, conscient que la procédure utilisée est une modélisation de l'hétérogénéité d'un groupe, Bailey mentionne pour la première fois que la crédibilité pourrait être utilisée hors du domaine de l'assurance générale. Malheureusement pour Bailey, le manque de popularité de l'approche bayesienne au sein de la communauté statistique au moment de la parution reléguera son article dans l'ombre. Sans doute l'approche très «théorique» de l'article, publié dans une revue essentiellement de praticiens, aura-t-elle aussi contribué à cet état de fait. Pourtant, dans un avenir pas si lointain, les travaux de Bailey seront reconnus pour leur importance et leur avant-gardisme. Cette reconnaissance proviendra cependant majoritairement d'outre-Atlantique.

L'apport de Bailey à la théorie de la crédibilité peut être résumé en deux points principaux : l'introduction explicite du principe de Bayes dans le processus de tarification et la découverte de la linéarité de l'estimateur bayesien sous certaines conditions [6] Ces développements parvinrent aux oreilles de

5. De la forme $c_0 + \sum_{i,j} c_{ij} X_{ij}$.

6. Sur ce point toutefois, il est difficile de savoir qui fut le pionnier. Norberg (1979) relève que Keffer (1929) a obtenu le même résultat pour le modèle Poisson/gamma. Toujours selon Norberg, il existerait aussi des références antérieures à 1929.

la communauté actuarielle européenne par la bouche de Bruno de Finetti au colloque de ASTIN à Trieste, en 1963. Depuis quelques années déjà, les chercheurs européens tâchaient de trouver une justification théorique à ces formules de crédibilité américaines qui fonctionnaient si bien. L'approche bayesienne avait là aussi fait des progrès importants, notamment grâce à Bruno de Finetti dans les années 30 et Ove Lundberg dans les années 40.

Parallèlement à tout cela, une nouvelle branche de la théorie bayesienne voyait le jour sous l'initiative de Herbert Robbins : l'approche bayesienne empirique. Celle-ci sera d'une importance capitale dans le développement futur de la crédibilité de précision puisqu'elle lui permettra de sauter le mur entre la théorie et la pratique. L'approche bayesienne empirique (Robbins, 1955, 1964) s'attaque au principal problème pratique de l'approche bayesienne pure, soit la fréquente ignorance de la distribution a priori. Jusqu'alors, lorsqu'une telle situation se présentait, il était coutume d'éviter le problème en réfutant l'aspect aléatoire d'une partie de la décision (Neyman, 1962). Grossièrement, la thèse de Robbins consiste à supposer que, bien qu'elle soit inconnue, la distribution a priori existe et qu'il est possible de l'estimer — ne serait-ce qu'indirectement — à partir de données issues de plusieurs expériences similaires. Selon lui (Robbins, 1964) :

> «L'approche bayesienne empirique de problèmes statistiques de prise de décision est applicable lorsque la même décision se présente à répétition et indépendamment avec une distribution fixe, mais inconnue du paramètre.» (Traduction libre)

Comme devait plus tard le mentionner Bühlmann, cela cadre admirablement bien avec le problème de l'*experience rating*.

Tous ces éléments — les travaux de Bailey, la popularité grandissante des approches bayesienne et bayesienne empirique — étaient réunis lors du congrès de ASTIN de 1965, à Lucerne. Hans Bühlmann y redéfinit alors le problème fondamental en *experience rating* et présente la solution qui allait révolutionner la théorie de la crédibilité. En forçant la prime bayesienne à être linéaire, Bühlmann (1967, 1969) obtient, dans un cadre non paramétrique, un facteur de crédibilité de la forme $z = n/(n+K)$, avec une expression simple et générale pour K. Le virage sera alors définitivement pris en faveur de l'approche de précision et l'essentiel de la recherche se fera en Europe. C'est pourquoi l'approche traitant l'hétérogénéité est aujourd'hui souvent appelée «crédibilité européenne» malgré qu'elle origine des États-Unis (notamment dans les travaux de Bailey). L'approche de stabilité, *limited fluctuations*, a par conséquent reçu l'appellation «crédibilité américaine».

On peut sans crainte poser que le célèbre modèle de Bühlmann marque le début de l'histoire contemporaine de la théorie de la crédibilité. Celle-ci étant bien davantage documentée et connue, on va maintenant se contenter de présenter chronologiquement les principaux modèles qui suivirent celui de Bühlmann[7]. La plupart de ces modèles se veulent des généralisations,

7. La liste ne comporte que les principaux modèles et n'est donc en rien exhaustive.

de plus en plus poussées, du modèle original de Bühlmann et bon nombre d'entres eux seront étudiés ultérieurement dans ce mémoire.

Le modèle de Bühlmann se décompose lui-même en deux parties communément appelées «modèle original» et «modèle classique». Le premier pose les bases de la nouvelle théorie, tandis que l'apport de la théorie bayesienne empirique fait du second un modèle plus pratique. La première généralisation de ces modèles voit le jour en 1970, alors que Bühlmann s'adjoint son étudiant au doctorat Erwin Straub pour développer le très célèbre modèle qui portera leurs noms (Bühlmann et Straub, 1970). L'ajout de poids aux données et la définition d'estimateurs des paramètres de structure constituent les principales améliorations au modèle de Bühlmann. Elles sont toutefois de taille et permettront à la crédibilité de précision de véritablement faire une percée dans la pratique de l'assurance. Le modèle de Bühlmann–Straub constitue encore aujourd'hui un standard et est couramment utilisé dans les compagnies d'assurance, en Europe surtout.

En 1974, Jewell fait la première de ses deux plus grandes contributions au développement de la théorie de la crédibilité. Il démontre (Jewell, 1974) que l'estimateur bayesien est linéaire pour toute fonction de vraisemblance membre de la famille exponentielle utilisée avec sa conjuguée naturelle. Ce faisant, Jewell ne fait que confirmer certains des résultats obtenus avant lui par Bailey (1950) et Mayerson (1964), mais les unifie en une formulation générale.

Les deux années suivantes furent fastes pour la théorie de la crédibilité. D'abord, Hachemeister (1975) généralise le modèle de Bühlmann–Straub en incorporant la régression linéaire à la théorie de la crédibilité de précision. Plus tard, on poussera même cette idée un peu plus loin en étudiant la régression non-linéaire (De Vylder, 1985). Puis, non satisfait de la manière qu'a le modèle de Bühlmann–Straub d'intégrer à la prime les données collatérales, Jewell (1975) présente sa solution : la crédibilité hiérarchique. Ce qui est maintenant appelé le modèle hiérarchique de Jewell constitue une importante généralisation de plusieurs modèles de crédibilité. Toujours en 1975, Gerber et Jones (1975) définissent les propriétés et les conditions menant à des primes de crédibilité de type «mise à jour» (*updating type*). En 1976, (De Vylder, 1976b) présente ses modèles de crédibilité semi-linéaire et semi-linéaire optimal. La même année, il propose une formulation du problème de la crédibilité en termes d'espaces de Hilbert (De Vylder, 1976a). Norberg et Taylor (1977) se sont également intéressés à l'étude de la théorie de la crédibilité dans le cadre abstrait des espaces de Hilbert. Norberg (1979) a publié un imposant article révisant l'essentiel de la théorie de la crédibilité connu jusqu'alors. Il s'agit, encore aujourd'hui, d'une référence de choix pour qui désire approfondir des connaissances de base en théorie de la crédibilité.

Si les années 70 furent celles de l'apparition de nombreux modèles de crédibilité de précision, les années 80 furent plutôt celles de l'étude des estimateurs des paramètres de structure. De Vylder (1978, 1981, 1984) s'est alors avéré un acteur important, de même que Norberg (1980), Gisler (1980) et Dubey et Gisler (1981). On doit à ces derniers la première étude exhaustive des propriétés asymptotiques des estimateurs de variance dans le modèle de Bühlmann–Straub. La découverte de nouveaux estimateurs et leur maîtrise va permettre la plus large diffusion de la crédibilité de précision. Des volumes sur le sujet sont publiés (Goovaerts et collab., 1990) dont certains (Goovaerts et Hoogstad, 1987) sont expressément destinés aux actuaires œuvrant dans les compagnies d'assurance. De nombreux articles importants en théorie de la crédibilité sont publiés par des chercheurs au service de compagnies d'assurance : mentionnons Straub, Sundt, Dubey, Gisler, Reinhard ou même Goovaerts, à titre de consultant. Cela contribue donc à populariser l'utilisation de la théorie dans des applications pratiques.

La période s'étendant du milieu des années 80 jusqu'au début des années 90 a été marquée par un ralentissement dans la recherche en théorie de la crédibilité. Au cours des dernières années cependant, on note un regain d'intérêt pour la recherche d'estimateurs des paramètres de structure plus efficaces et dont les propriétés seraient davantage connues. Ainsi, Künsch (1992) et Gisler et Reinhard (1993) introduisent la statistique robuste en théorie de la crédibilité, ce qui ouvre par le fait même un nouveau et vaste champ de recherche. De leur côté, De Vylder et Goovaerts, toujours très actifs dans le domaine, proposent dans une série d'articles des estimateurs optimaux sous certaines conditions (De Vylder et Goovaerts, 1991, 1992a,b). Des recherches sont présentement en cours desquelles, nous promet-on, devraient ressortir de toutes nouvelles façons de trouver des estimateurs pour les principaux modèles de crédibilité.

La grande majorité des intéressés à la théorie de la crédibilité se rallient au modèle de base proposé par Bühlmann de même qu'à ses extensions. De plus, l'historique tracé ci-dessus correspondant à ce qui est généralement admis dans le domaine. À une exception près semble-t-il : Zehnwirth (1991) qui, sans renier les travaux de Bühlmann, a une manière bien à lui de concevoir et présenter la théorie de la crédibilité de précision. Selon lui, les formules de crédibilité sont si étroitement liées à la régression linéaires qu'elles n'en seraient que de simples dérivés. Karl Friedrick Gauss étant à l'origine de certains types de formules de régression, Zehnwirth en arrive à la conclusion suivante : «cela signifie que Gauss (1795) a dérivé la plupart des formules de crédibilité».

1.4 En conclusion

Ce chapitre s'est ouvert sur une présentation de l'approche bayesienne en statistiques. Celle-ci allait en quelque sorte devenir le dénominateur commun des deux théories par la suite étudiées, celle de Bertrand Russell et la théorie actuarielle de la crédibilité. Ce pont permet l'intéressante comparaison de la définition donnée par Russell au mot «crédibilité» à sa signification actuarielle. On voit ainsi qu'en actuariat comme dans la philosophie de Russell, la crédibilité apparaît lors du passage du général au particulier, soit lors de la tarification d'un assuré pris isolément et non plus comme simple membre d'un groupe. Le traitement de l'information a priori ainsi que le gain marginal de crédibilité décroissant en théorie de la crédibilité de stabilité ou à la crédibilité de précision. Là n'en est pas le bus de toute façon, puisque chacune de ces deux théories est valable en soi, seuls leurs buts étant différents.

Au début de la section précédente, il a été mentionné que la théorie de la crédibilité en était à son adolescence. Ce n'est là que l'opinion de l'auteur, qu'il justifie en mentionnant qu'il serait prématuré de croire que la théorie a atteint sa pleine maturité. Le récent regain d'intérêt pour le sujet de la part des chercheurs en témoigne d'ailleurs et démontre que son potentiel n'est pas épuisé. De plus, constatant à quel point la théorie est galvaudée en Amérique du Nord, force est d'affirmer que pour prétendre à la majorité, la crédibilité devra d'abord savoir s'affirmer dans ses différentes facettes.

2 Crédibilité américaine ou de stabilité

2.1 Le montant total des sinistres, S, a une distribution binomiale composée de paramètres $n = 1\ 000$ et $\theta = 0{,}6$. La distribution du montant des sinistres est une log-normale de paramètres $\mu = 3$ et $\sigma = 4$. Calculer $E[S]$ et $\mathrm{Var}[S]$.

2.2 Sachant que le nombre de sinistres a une distribution binomiale négative de paramètres $n = 4$ et $\theta = 0{,}5$ et que la sévérité d'un sinistre a une distribution gamma de paramètres $\alpha = 2$ et $\lambda = 0{,}5$ calculer l'espérance et la variance du montant total des sinistres, S.

2.3 Interpréter l'inégalité suivante :

$$\Pr[0{,}96E[S] \leq S \leq 1{,}04E[S]] \geq 0{,}95.$$

2.4 Dériver une formule générale pour déterminer le niveau de crédibilité complète d'ordre (k, p) pour $\bar{S} = (S_1 + \cdots + S_n)/n$ lorsque la distribution du montant total des sinistres est une Poisson composée.

2.5 Soit $N \sim \mathrm{Poisson}(256)$, $X \sim \mathrm{Pareto}(3, 0{,}05)$ et $S = X_1 + \cdots + X_N$.

a) Quelle est la plus petite marge d'erreur admissible autour de $E[S]$ faisant toujours en sorte que S a une crédibilité complète à 90 % ? Interpréter brièvement le résultat.

b) Quelle est la plus petite marge d'erreur admissible autour de $E[\bar{S}]$ faisant toujours en sorte que $\bar{S}$ a une crédibilité complète à 90 % après 10 années ?

2.6 Dans son article de 1914, Mowbray cherche à déterminer le nombre minimal d'employés (*payroll exposure*) qu'un employeur doit avoir sous contrat pour que son expérience puisse être considérée complètement crédible (*dependable*). Mowbray suppose que la fréquence des accidents chez un employeur suit une distribution binomiale de paramètres n — le nombre d'employés — et θ — la probabilité qu'un employé ait un accident (supposée connue). Trouver la formule donnant le nombre d'employés assurant une crédibilité complète d'ordre (k, p).

2.7 Sachant que la variable aléatoire S de l'expérience des contrats obéit à une loi $N(\mu, \sigma^2)$, trouver, pour une période d'expérience, la relation entre μ et σ pour avoir une crédibilité complète d'ordre (k, p) pour chacune des combinaisons de k et p suivantes.

a) $(0{,}04, 0{,}95)$

b) $(0{,}05, 0{,}90)$

c) $(0{,}01, 0{,}98)$

2.8 Sachant que $S \sim N(\mu, \sigma^2)$ et $\bar{S} = (S_1 + \cdots + S_9)/9$, où $S_1, \dots, S_9$ sont toutes des variables aléatoires mutuellement indépendantes distribuées comme S, déterminer la relation entre μ et σ faisant en sorte que $\bar{S}$ a une crédibilité complète d'ordre (k, p) pour chacune des combinaisons de k et p suivantes.

a) (0,05, 0,90)

b) (0,05, 0,95)

c) (0,01, 0,90)

d) (0,01, 0,95)

2.9 Juliette travaille au département de tarification d'une compagnie d'assurance très active en assurance automobile. À la suite d'une analyse de données exhaustive, Juliette peut affirmer que la fréquence des sinistres pour ce type de produit a une distribution binomiale négative de paramètres r et $\theta = 0{,}01$. La sévérité des sinistres, quant à elle, suit une loi gamma de paramètres $\alpha = 0{,}02$ et $\lambda = 1$. Trouver la plus petite valeur de r telle que le montant total des sinistres d'un contrat d'assurance automobile sera à plus ou moins 5 % égal à sa moyenne, 19 fois sur 20.

2.10 Soit S_j le montant total des sinistres pour un assuré à la période $j = 1, \dots, n$ tel que

$$S_j = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_j},$$

où $X_1, X_2, \dots$ sont les montants individuels des sinistres dont la distribution est dégénérée en M et N_j suit une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer le nombre total de sinistres espéré minimal pour accorder une crédibilité complète d'ordre $(0{,}04, 0{,}90)$ à l'expérience individuelle $\bar{S}$.

2.11 Soit S_j le montant total des sinistres pour un assuré à la période $j = 1, \dots, n$ et $S_j \sim$ Poisson composée$(\lambda, F_X(\cdot))$. Le montant d'un sinistre individuel a une variance de 100 et une espérance de 5. Déterminer le nombre minimal espéré de sinistres pour accorder une crédibilité complète selon les critères ci-dessous.

a) Le montant total des sinistres demeure à 3 % ou moins du montant espéré avec une probabilité de 95 %.

b) Le nombre total de sinistres demeure à 3 % ou moins du nombre espéré avec une probabilité de 95 %.

2.12 Une compagnie assure deux groupes ayant la même loi de Poisson pour la fréquence de leurs sinistres individuels. Cependant, les individus du groupe A ne peuvent avoir que des sinistres de 50 alors que les individus du groupe B ont des sinistres obéissant à une loi gamma de moyenne 50. Si l'on sait que l'observation de 1 000 sinistres est suffisante pour accorder une crédibilité complète au groupe A et que 3 000 sinistres sont nécessaires pour accorder une crédibilité complète de même ordre au groupe B, calculer les paramètres de la loi gamma en question.

2.13 Dans un modèle Poisson composée, on accorde une crédibilité complète d'ordre $(0{,}05, p)$ au nombre total de sinistres si le nombre de sinistres observé est supérieur à 1 000. Quel doit être le nombre de sinistres minimal que l'on doit observer pour accorder une crédibilité d'ordre $(0{,}25, p)$ au montant total des sinistres si le montant d'un sinistre individuel suit une loi $\text{Gamma}(2, 2)$?

2.14 Pour ses calculs relatifs à l'admission au régime rétrospectif, la CSST peut n'employer que la fréquence des sinistres, ou encore la fréquence ainsi que la sévérité. Dans le premier cas, le nombre minimal d'employés pour être admissible au régime rétrospectif est de 6 494 en supposant que la probabilité d'avoir un accident est de 0,04. Sachant que le coefficient de variation de la sévérité des sinistres est de 2, que devient le seuil d'admissibilité lorsque la sévérité est également prise en compte dans les calculs ?

2.15 Le montant total des sinistres a une distribution Poisson composée où les montants de sinistres individuels proviennent d'une loi Pareto de paramètres $\alpha = 3$ et $\lambda = 100$. Lorsque la largeur de l'intervalle de confiance autour de la moyenne est 5 % de celle-ci, le seuil de crédibilité complète est 2 500. On décide de changer la distribution de la fréquence des sinistres pour une binomiale négative avec $\theta = 0{,}5$. Si le seuil de crédibilité complète et le niveau de confiance de l'intervalle autour de la moyenne demeurent tous deux inchangés, quelle est la nouvelle largeur de l'intervalle de confiance ?

2.16 On vous donne les renseignements suivants :

(i) $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$ et les variables aléatoires X_j sont mutuellement indépendantes et indépendantes de N.

(ii) $X_j \sim \text{Pareto}(3, 3)$

(iii) $N \sim \text{Binomiale négative}(r, 1/3)$.

Calculer la valeur minimale de r pour que l'on puisse accorder une crédibilité complète d'ordre $(0{,}05, 0{,}90)$ à S. Utiliser l'approximation normale.

2.17 Soit S la variable aléatoire du montant total des sinistres pour un portefeuille d'assurance. Sachant que $S \sim \text{Poisson composée}(\lambda, F_X(\cdot))$, trouver le seuil de crédibilité complète en termes du nombre espéré de sinistres selon les hypothèses de distribution suivantes.

a) $\Pr[X = 1] = 1$ (dégénérée en 1), $k = 0{,}05$ et $p = 0{,}90$.

b) $X \sim \text{Exponentielle}(2)$, $k = 0{,}04$, $p = 0{,}95$.

c) Si le seuil de crédibilité complète selon les conditions en b) n'est pas atteint, quel facteur de crédibilité partielle accorderait-on à $\bar{S}$ pour une période d'expérience (en fonction de λ) ?

2.18 L'actuaire de la compagnie ABC croit qu'il faudrait 3 000 sinistres pour accorder une crédibilité complète à un assuré d'un groupe si la sévérité est constante. Après une étude, il se rend compte que la sévérité suit plutôt une loi de Pareto de moyenne 1 000 avec $\alpha = 3$. Si le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson, combien de sinistres doit-on avoir observé si l'on a accordé, après une période d'expérience, une crédibilité de 0,5 à l'expérience individuelle de l'assuré ?

2.19 On vous donne les informations suivantes :

(i) Le nombre de sinistres suit une loi de Poisson.

(ii) Le montant des sinistres a une distribution log-normale avec un coefficient de variation de 3.

(iii) Le nombre et les montants de sinistres sont indépendants.

(iv) Le nombre de sinistres la première année fut de 1 000.

(v) Le montant total des sinistres la première année fut de 6,75 millions.

(vi) La prime collective pour la seconde année est de 5,00 millions.

(vii) Le volume du contrat est le même pour la première et la seconde année.

(viii) Le niveau de crédibilité complète assure que le montant total des sinistres sera à 5 % de la moyenne 95 % du temps.

Déterminer la prime de crédibilité (partielle) selon l'approche de crédibilité de stabilité. Calculer le niveau de crédibilité complète sur le nombre d'années d'expérience et utiliser la formule de la racine carrée pour calculer le facteur de crédibilité.

2.20 On vous dit que $S \sim \text{Poisson composée}(\lambda, F_X(\cdot))$. La fréquence annuelle espérée des sinistres est évaluée à 0,035. La grandeur minimale du portefeuille de l'assureur pour accorder une crédibilité complète à l'expérience est 103 500. Pour accorder une crédibilité de 0,67 à l'expérience d'une période, quelle doit être la grandeur minimale du portefeuille ?

2.21 Les contrats d'une compagnie d'assurance pour un certain type de produit ont les caractéristiques ci-dessous.

	Nombre de sinistres	Montant des sinistres
Espérance	10	5 000
Variance	10	6 250 000

Une crédibilité complète est accordée à l'expérience d'un contrat après n années si celle-ci se concentre dans un intervalle de 10 % autour de sa moyenne avec probabilité de 90 %. Déterminer après combien d'années d'expérience le facteur de crédibilité partielle sera de 0,54 selon chacune des formules de crédibilité partielle ci-dessous.

a) $z = \left(\dfrac{n}{n_0}\right)^{1/2}$

b) $z = \left(\dfrac{n}{n_0}\right)^{2/3}$

Exercices proposés dans *Loss Models*

2[e] édition : 16.7, 16.10, 16.11, 16.12, 16.13, 16.15, 16.16.

3[e] édition : 20.1, 20.4, 20.5, 20.6. 20.7, 20.9, 20.10.

Réponses

2.1 $E[S] = 89\ 047$, $\mathrm{Var}[S] = 713\ 633\ 042$

2.2 $E[S] = 16$, $\mathrm{Var}[S] = 160$

2.3 On veut être certain à au moins 95 % que l'expérience individuelle d'un assuré ne varie pas de plus de 4 % autour de la prime pure ; on veut une crédibilité complète d'ordre $(0{,}04, 0{,}95)$.

2.4 $n \geq \lambda^{-1}(\zeta_{\varepsilon/2}/k)^2(1 + \mathrm{CV}(X)^2)$

2.5 a) $k \geq 0{,}2056$ b) $k \geq 0{,}065$

2.6 $n \geq (\zeta_{\varepsilon/2}/k)^2(1-\theta)/\theta$

2.7 a) $\mu \geq 49\sigma$ b) $\mu \geq 32{,}9\sigma$ c) $\mu \geq 232{,}6\sigma$

2.8 a) $\mu \geq 10{,}97\sigma$ b) $\mu \geq 13{,}07\sigma$ c) $\mu \geq 54{,}83\sigma$ d) $\mu \geq 65{,}33\sigma$

2.9 $r \geq 2\ 328{,}24$

2.10 1 692

2.11 a) 21 343 sinistres b) 4 269 sinistres

2.12 $\alpha = 1/2$, $\lambda = 1/100$

2.13 60 sinistres

2.14 33 552

2.15 13 975

2.16 $r \geq 3247{,}23$

2.17 a) 1 082 b) 4 802 c) $\sqrt{\lambda/4\,802}$

2.18 3 000 sinistres

2.19 5,45

2.20 46 462

2.21 a) 9,86 années b) 13,42 années

3 Crédibilité bayesienne

3.1 Un portefeuille d'assurance automobile est composé de 35 % de bons conducteurs, 40 % de conducteurs moyens et 25 % de mauvais conducteurs. L'actuaire a estimé que les bons conducteurs ont, en moyenne, un accident par 10 ans, les conducteurs moyens, deux accidents et les mauvais conducteurs, six accidents. L'actuaire suppose de plus que la fréquence des accidents a une distribution de Poisson. Par souci de simplicité, les sinistres sont tous d'un montant de 1.

a) Quelle est la probabilité qu'un assuré choisi au hasard ait un accident ?

b) Calculer la prime de risque pour chacun des trois types de conducteurs.

c) Calculer la prime collective.

d) Calculer la prime bayesienne de sixième année d'un contrat ayant le dossier suivant au cours des cinq premières années : 1, 0, 1, 1, 0.

3.2 Le *Zchoulp* se joue avec deux dés à six faces. Le premier est un dé usuel, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le second dé a deux faces numérotées 5 et les autres numérotées de 1 à 4.

a) Un dé est choisi au hasard et lancé. Quelle est la probabilité d'obtenir un 5 ?

b) Si le résultat du lancer en a) est un 5 et que le même dé est relancé, quelle est la probabilité d'obtenir à nouveau un 5 ?

3.3 Deux urnes contiennent chacune une pièce de monnaie. La pièce dans l'urne A tombe sur face 40 % des fois et celle dans l'urne B, 80 % des fois. On choisit une urne au hasard (la probabilité de choisir l'urne A est la même que celle de choisir l'urne B) et on prend la pièce qui s'y trouve. On lance la pièce en l'air cinq fois et elle retombe sur pile quatre fois. Si l'on lance la pièce à cinq autres reprises, quel est le nombre espéré de fois que la pièce retombera sur pile ?

3.4 Les employeurs couverts par le régime d'assurance médicament d'un assureur sont classés par ce dernier dans trois groupes de taille égale. La probabilité de subir un sinistre dans une période pour chacun de ces groupes est donnée dans le tableau ci-dessous.

Groupe	Probabilité de sinistre
Fréquence faible	10 %
Fréquence moyenne	20 %
Fréquence élevée	40 %

L'assureur suppose de plus que les sinistres sont indépendants à l'intérieur de chacun des groupes.

a) Quelle est la probabilité qu'un employeur choisi au hasard dans ce portefeuille ait un sinistre ?

b) Après deux années d'expérience, l'employeur choisi en a) présente un dossier de sinistre vierge. À la lumière de ces résultats, quelle est la probabilité que cet employeur fasse partie du groupe à fréquence de sinistre faible ?

c) Quelle est maintenant la probabilité que l'employeur mentionné ci-dessus ait un sinistre lors de la troisième année ?

3.5 On souhaite tester si une pièce de monnaie est équilibrée ou non (probabilité de $\frac{1}{2}$ de tomber sur pile ou face). L'incertitude quant à la probabilité θ d'obtenir, disons, pile lors d'un lancer de la pièce est traduite en une variable aléatoire Θ. Celle-ci est distribuée selon une loi Bêta de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

a) Trouver $E[\Theta]$.

b) La pièce de monnaie est lancée n fois. La variable aléatoire S représente le nombre de fois que la pièce est tombée sur face. Trouver la distribution a posteriori de Θ.

c) Une petite expérience pratique maintenant, aussi ludique qu'enrichissante. Jouer à pile ou face une bonne dizaine de fois avec une pièce quelconque. Enregistrer une valeur de 0 pour pile et 1 pour face. Après chaque lancer, calculer la distribution a posteriori de Θ et en faire un graphique approximatif. On peut aussi utiliser les fonctions `curve` et `dbeta` de R pour faire les graphiques. Par exemple, pour tracer la densité d'une bêta avec $\alpha = 4$ et $\beta = 2$ on fera

```
> curve(dbeta(x, 4, 2), from = 0, to = 1)
```

Observer les déplacements de la densité en fonction des résultats. Commencer l'expérience avec $\alpha = \beta = 1$, soit $\Theta \sim U(0,1)$.

d) Quelle est votre estimation de la probabilité d'obtenir pile au onzième lancer de la pièce si vous ignorez les résultats des dix premiers lancers ?

e) Quelle est maintenant votre estimation si vous connaissez les résultats des dix lancers effectués en c) ?

3.6 Votre opinion a priori quant à la distribution du montant des sinistres est une loi de Pareto de paramètres $\lambda = 10$ et $\theta = 1{,}2$ ou 3, ces valeurs de θ

étant toutes équiprobables. Pour un contrat choisi au hasard, vous observez par la suite un sinistre d'un montant de 20. Déterminer la probabilité que le montant du prochain sinistre de ce contrat soit supérieur à 30.

3.7 On demande à Camille d'élaborer un modèle pour la fréquence des sinistres au sein d'un portefeuille composé de dix contrats. Incertaine quant à la probabilité d'avoir un accident, Camille estime à 20 % la possibilité que la probabilité soit de 0,04, 60 % qu'elle soit de 0,10 et 20 % qu'elle soit de 0,16.

a) Quel est le modèle de Camille pour N, le nombre total d'accidents du portefeuille au cours d'une année ?

b) Quelle est la probabilité qu'il y ait 0, 1 et 2 accidents au cours d'une année ?

c) Comparer ces résultats avec la situation où Camille serait certaine que la probabilité d'accident est de 0,10.

3.8 Soit $S|\Theta \sim \text{Gamma}(2, \Theta)$ et $\Theta^{-1} \sim \text{Bêta}(2, 1)$. Trouver $\text{Var}[S]$.

3.9 Soit S la variable aléatoire représentant le nombre de sinistres d'un contrat d'assurance au cours d'une année. Le nombre de sinistres a une distribution de Poisson de paramètre inconnu Θ. La fonction de densité de probabilité de Θ est la suivante :

$$u(\theta) = \frac{5}{4}\frac{1}{\theta^2}, \quad 1 < \theta < 5.$$

a) Calculer $\Pr[S = 2]$.

b) Calculer $\Pr[S_3 = 0 | S_1 = 1, S_2 = 1]$.

c) Calculer la prime bayesienne de troisième année étant donné l'expérience en b).

3.10 La compagnie YARD assure un groupe de maisons contre les incendies. Son actuaire a divisé les maisons en trois classes de risque équiprobables : A, B et C. La probabilité qu'une maison prenne feu dans une année est de $\frac{1}{4}$, quelle que soit la classe. La distribution du montant à payer sachant qu'il y a eu incendie est donnée dans le tableau cidessous. Quelle est la prime bayesienne pour la deuxième année pour un assuré qui a eu un sinistre de 30 000 \$ l'année dernière ?

	Probabilité		
Montant du sinistre	Classe A	Classe B	Classe C
10 000	3/5	0	1/5
20 000	1/5	1/2	1/5
30 000	1/5	1/2	3/5

3.11 Vous savez que le nombre de sinistres pour un assuré est distribué selon une loi de Poisson de paramètre aléatoire. Ce paramètre est distribué selon une loi gamma avec moyenne 2 et variance 2. De plus, tout sinistre est d'un montant de 1 \$.

a) Trouver la prime qui devrait être exigée d'un nouvel assuré.

b) Trouver la prime bayesienne pour la quatrième année si cet assuré a eu huit sinistres au cours de ses trois premières années.

3.12 Le nombre annuel d'accidents d'un assuré suit une loi binomiale de paramètre $n = 2$. Il y a toutefois incertitude quant à la probabilité θ que cet assuré ait un accident. Trois valeurs sont jugées possibles : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{8}$ et ce, avec probabilité 25 %, 25 % et 50 %, respectivement. L'assuré n'a eu aucun accident la première année et deux accidents la deuxième année.

a) Calculer la distribution révisée de Θ à la lumière des deux premières années d'expérience.

b) Calculer le nombre espéré d'accidents de cet assuré pour la troisième année.

3.13 On simule une expérience de sinistre comme suit : on lance un dé, et on pose le résultat égal à θ. Connaissant θ, on simule un nombre aléatoire d'une distribution uniforme sur $[0, 100\theta]$.

a) Trouver la prime bayesienne si des résultats de 80 et 340 ont été obtenus lors des deux premiers essais.

b) Est-il possible d'écrire la prime bayesienne sous forme d'une prime de crédibilité ? Si oui, trouver le facteur de crédibilité.

3.14 On suppose que $S_j|\Theta = \theta$ suit une loi Gamma$(2, \theta)$. On fait l'hypothèse que la fonction de densité de probabilité de Θ est la suivante :

$$u(\theta) = \begin{cases} \theta/50, & 0 < \theta < 10 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On simule deux valeurs de S et on obtient $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$. Quelle est maintenant la distribution a posteriori de Θ pour ce simulateur ?

3.15 On vous donne les informations ci-dessous au sujet d'un régime d'assurance dentaire.

i) La fréquence des sinistres des assurés suit une loi de Poisson.

ii) La moitié des assurés a en moyenne deux sinistres par année.

iii) L'autre moitié a en moyenne quatre sinistres par année.

Un assuré choisi au hasard au sein du portefeuille a eu quatre sinistres dans chacune des deux premières années.

a) Énoncer le modèle complet utilisé ici par l'assureur.

b) Déterminer l'estimateur bayesien du nombre de sinistres de cet assuré pour la troisième année.

3.16 Un portefeuille d'assurance est composé de 25 % de bons risques, 60 % de risques moyens et 15 % de mauvais risques. Tous les risques ont une distribution de sinistres de type gamma, mais dont les paramètres diffèrent selon le tableau ci-dessous.

Type de risque	α	λ
Bon	4	2
Moyen	4	1
Mauvais	10	2

Le dossier de sinistre d'un risque choisi au hasard est de 1 et 2 au cours des deux premières années. Calculer la prime bayesienne de ce risque pour la troisième année.

3.17 Considérer l'information suivante au sujet de deux groupes de contrats.

i) La fréquence des sinistres des contrats du groupe A a une distribution de Poisson de moyenne 1 par année.

ii) La fréquence des sinistres des contrats du groupe B a une distribution de Poisson de moyenne 3 par année.

iii) Les montants de sinistres des contrats du groupe A a une distribution exponentielle de moyenne 1.

iv) Les montants de sinistres des contrats du groupe B a une distribution exponentielle de moyenne 3.

v) Les deux groupes sont composés d'un nombre égal de contrats.

vi) À l'intérieur de chaque groupe, la fréquence et la sévérité des sinistres sont indépendantes.

Un contrat choisi au hasard a deux accidents au cours de la première année. Le montant de ces sinistres est de 1 et 3.

a) Énoncer le modèle pour la fréquence et la sévérité des sinistres dans ce portefeuille.

b) Calculer l'espérance a posteriori du montant total des sinistres du contrat choisi ci-dessus. (*Note* : calculer l'espérance du montant total des sinistres comme le produit de l'espérance de la fréquence et de l'espérance de la sévérité des sinistres.)

3.18 Soit un modèle géométrique/bêta, c'est-à-dire

$$\Pr[S = x|\Theta = \theta] = \theta(1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, \dots$$

et

$$u(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

a) Calculer la prime de risque.

b) Calculer la prime collective.

c) Calculer la distribution a posteriori de Θ après n années d'expérience $S_1, \dots, S_n$.

d) Calculer la distribution prédictive de S_{n+1}.

e) Calculer la prime bayesienne à partir du résultat en c) ou celui en d). Pourquoi avoir choisi une approche plutôt qu'une autre ?

f) Exprimer la prime bayesienne en e) comme une prime de crédibilité.

3.19 Soit $S|\Theta \sim \text{Binomiale}(\nu, \Theta)$ et $\Theta \sim \text{Bêta}(\alpha, \beta)$.

a) Déterminer la prime de risque.

b) Déterminer la prime collective.

c) Déterminer la distribution a posteriori de Θ après n années.

d) Déterminer la prime bayesienne pour la $(n+1)^{\text{e}}$ année et vérifier si celle-ci peut s'exprimer comme une prime de crédibilité ou non.

3.20 Soit $S|\Theta \sim \text{Gamma}(\tau, \Theta)$ et $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$.

a) Déterminer la distribution marginale de S. Identifier cette distribution à trois paramètres.

b) Calculer la prime de risque.

c) Calculer la prime collective, d'abord à l'aide de la distribution marginale de S, puis comme la moyenne des primes de risque.

d) Déterminer la distribution a posteriori de Θ après n années d'expérience $S_1, \dots, S_n$.

e) Déterminer la distribution prédictive de S_{n+1}.

f) Calculer la prime bayesienne, d'abord à partir de la distribution a posteriori de Θ, puis à partir de la distribution prédictive.

g) La prime bayesienne est-elle une prime de crédibilité ?

3.21 Soit $S|\Theta = \theta \sim \text{Exponentielle}(\theta)$, $\Theta \sim \text{Gamma}(7, 42)$, la prime bayesienne de cinquième année est 9 et celle de sixième année, 8,5. Trouver x_5.

3.22 Vous utilisez un modèle Poisson/gamma pour la tarification d'un contrat d'assurance. Les paramètres du modèle sont tels qu'après quatre années le facteur de crédibilité de ce contrat serait de 0,8. Si vous changez les hypothèses de telle sorte que la variance de la distribution de Θ est doublée, mais que l'espérance demeure inchangée, combien d'années faudra-t-il au contrat pour atteindre un niveau de crédibilité de 0,8 ?

3.23 Pour un modèle Poisson/gamma, on vous donne

$$\Pr[S_3 = x | S_1 = 1, S_2 = 2] = \binom{6+x}{x} (0{,}9)^7 (0{,}1)^x, \quad x = 0, 1, \dots.$$

Quelle est l'espérance de la distribution a priori de Θ ?

3.24 On suppose que la distribution de $S_t|\Theta = \theta$ est une Exponentielle(θ) et que la distribution a priori de Θ est une Gamma$(2, 8)$. Calculer $\Pr[S_4 \leq 5 | S_1 = 2, S_2 = 3, S_3 = 7]$.

3.25 Un contrat d'assurance a encouru les sinistres suivants sur une période de cinq années : 3, 1, 5, 4, 2. On utilise un modèle Poisson/gamma. Calculer la prime de crédibilité de ce contrat pour la sixième année pour chacune des combinaisons de paramètres de la distribution gamma ci-dessous. Interpréter les différences entre les primes de crédibilité.

a) $\alpha = 10$, $\lambda = 5$

b) $\alpha = 50$, $\lambda = 25$

c) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{4}$

3.26 La distribution marginale du montant total des sinistres d'un contrat d'assurance est

$$f(x) = \frac{1\,500}{(100+x)^{2,5}}, \quad x > 0.$$

Sous les hypothèses usuelles en théorie de la crédibilité, quel est le montant total des sinistres espéré après cinq années sans accident ?

3.27 Les montants de sinistres d'un contrat furent de $S_1 = 7$, $S_2 = 13$, $S_3 = 1$, $S_4 = 4$ au cours des quatre premières années qu'il était couvert par votre compagnie d'assurance. Votre expérience antérieure avec ce type de contrat vous permet de postuler le modèle suivant pour les montants de sinistres de ce contrat :

$$\Pr[S = x|\Theta = \theta] = \binom{x+4}{4}\theta^5(1-\theta)^x, \quad x = 0,1,\dots,$$
$$u(\theta) = 504\,\theta^5(1-\theta)^3, \quad 0 < \theta < 1.$$

Calculer la prime bayesienne de cinquième année.

3.28 Pour un certain modèle Poisson/gamma, on a

$$\Pr[S_3 = s_3|S_1 = 1, S_2 = 2] = \binom{6+s_3}{s_3}(0{,}9)^7(0{,}1)^{s_3}, \quad s_3 = 0,1,\dots.$$

Trouver la covariance entre S_1 et S_2.

3.29 On démontre dans cet exercice le résultat obtenu par Jewell (1974), à savoir que la prime bayesienne issue d'un mélange d'une distribution de la famille exponentielle avec sa conjuguée naturelle est une prime de crédibilité. Soit donc la variable aléatoire $S|\Theta = \theta$ dont la distribution est membre de la famille exponentielle univariée, c'est-à-dire

$$f(x|\theta) = \frac{p(x)e^{-\theta x}}{q(\theta)},$$

où $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ sont des fonctions quelconques.

a) Démontrer que la conjuguée naturelle de $f(x|\theta)$ est

$$u(\theta) = \frac{q(\theta)^{-t_0}e^{-\theta x_0}}{d(t_0, x_0)},$$

où $t_0 > 0$, $x_0 > 0$ et $d(t_0, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\theta)^{-t_0} e^{-\theta x_0}\, d\theta$. (*Astuce* : démontrer que la distribution a posteriori $u(\theta|x_1, \dots, x_n)$ est de la même famille que la distribution a priori $u(\theta)$.)

b) Démontrer que

$$\mu(\theta) = -\frac{q'(\theta)}{q(\theta)} = -\frac{d}{d\theta} \ln q(\theta).$$

c) Démontrer que

$$\frac{d}{d\theta} u(\theta) = (t_0 \mu(\theta) - x_0) u(\theta).$$

d) En intégrant l'équation en c) de part et d'autre par rapport à θ et en supposant que $u(\theta) = 0$ aux deux extrémités de son domaine de définition, démontrer que la prime collective est $E[\mu(\Theta)] = x_0/t_0$.

e) Avec ce qui précède, trouver la prime bayesienne et démontrer qu'il s'agit d'une prime de crédibilité.

3.30 La variable aléatoire $S|\Theta = \theta$ a une distribution exponentielle de moyenne θ et Θ une distribution gamma de paramètres α et λ. Démontrer que, dans un tel cas, la distribution gamma n'est pas la conjuguée naturelle de l'exponentielle.

3.31 Démontrer que $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ est la conjuguée naturelle de $S|\Theta = \theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$ et trouver les paramètres de la distribution a posteriori de Θ.

3.32 Démontrer que les densités suivantes sont membres de la famille exponentielle en trouvant $A(x)$, $B(x)$ et $q(\theta)$ pour chacune d'elles.

a) Binomiale(n, θ), où n est connu.

b) Bêta(θ, β), où β est connu.

c) Normale(θ, σ^2), où σ^2 est connu.

d) Gamma(θ, λ), où λ est connu.

e) Exponentielle(θ).

3.33 Pour le modèle géométrique/bêta, trouver $a(x)$, $c(\theta)$, x_0 et n_0 dans le modèle de Jewell.

3.34 Par le modèle de Jewell, démontrer que

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty$$

correspond au cas normale/normale et trouver les paramètres des deux distributions.

Exercices proposés dans *Loss Models*

2[e] édition : 16.22 a-j), 16.23 a-j), 16.34 a), 16.37 a), 16.40 a), etc.

3[e] édition : 20.24 a-j), 20.25 a-j), 20.36 a), 20.39 a), 20.42 a), etc.

Réponses

3.1 a) 0,1795 b) 0,1, 0,2 et 0,6 c) 0,265 d) 0,4585

3.2 a) 1/4 b) 5/18

3.3 2,95

3.4 a) 7/30 b) 0,4475 c) 0,1950

3.5 a) $\alpha/(\alpha+\beta)$
b) $\Theta|S = x \sim \text{Bêta}(\alpha + x, \beta + n - x)$
d) $\alpha/(\alpha+\beta)$
e) $(\alpha + x)/(\alpha + \beta + n)$

3.6 0,1484

3.7 b) $\Pr[N = 0] = 0{,}377$, $\Pr[N = 1] = 0{,}354$, $\Pr[N = 2] = 0{,}184$
c) $\Pr[N = 0|\Theta = 0{,}10] = 0{,}349$, $\Pr[N = 1|\Theta = 0{,}10] = 0{,}387$, $\Pr[N = 2|\Theta = 0{,}10] = 0{,}194$

3.8 11/9

3.9 a) 0,2257 b) 0,2453 c) 1,4987

3.10 5 788

3.11 a) 2 b) 2,5

3.12 $\Pr[\Theta = 1/4|N_1 = 0, N_2 = 2] = 0{,}2891$, $\Pr[\Theta = 1/2|N_1 = 0, N_2 = 2] = 0{,}5141$, $\Pr[\Theta = 1/8|N_1 = 0, N_2 = 2] = 0{,}1968$.

3.13 a) 236,67 b) non

3.14 $u(\theta|S_1 = 1, S_2 = 1) = \theta^5 e^{-2\theta}/1{,}8737$, $0 < \theta < 10$

3.15 b) 3,6484

3.16 2,3107

3.17 b) 6,286

3.18 Voir le tableau de l'annexe A.

3.19 a) $\nu\Theta$ b) $\nu\alpha/(\alpha+\beta)$ c) $\text{Bêta}(\alpha + \sum_{t=1}^n S_t, \beta + n\nu - \sum_{t=1}^n S_t)$ d) $z = n/(n + (\alpha+\beta)/\nu)$

3.20 a) Pareto généralisée b) τ/Θ c) $\tau\lambda/(\alpha-1)$ d) Gamma$(\alpha+n\tau, \lambda+\sum_{t=1}^{n} S_t)$ e) Pareto généralisée$(\alpha+n\tau, \lambda+\sum_{t=1}^{n} S_t, \tau)$ f) $\tau(\lambda+\sum_{t=1}^{n} S_t)/(\alpha+n\tau-1)$ g) $z = n/(n+(\alpha-1)\tau^{-1})$

3.21 3,5

3.22 2

3.23 4/7

3.24 0,67

3.25 a) 2,5 b) 2,17 c) 2,9524

3.26 200/11

3.27 5,8

3.28 4/49

3.32 a) $A(x) = x$, $B(x) = \ln\binom{n}{x}$, $q(\theta) = n\ln(1-\theta)$

b) $A(x) = \ln x$, $B(x) = (\beta-1)\ln(1-x)$, $q(\theta) = \ln\Gamma(\theta+\beta) - \ln\Gamma(\theta) - \ln\Gamma(\beta)$

c) $A(x) = x$, $B(x) = -x^2/(2\sigma^2)$, $q(\theta) = -\ln\sqrt{2\pi}\sigma - \theta^2/(2\sigma^2))$

d) $A(x) = \ln x$, $B(x) = -\lambda x$, $q(\theta) = \theta\ln\lambda - \ln\Gamma(\theta)$

e) $A(x) = x$, $B(x) = 0$, $q(\theta) = \ln\theta$

3.33 $a(x) = 1$, $c(\theta) = (1-e^{-\theta})^{-1}$, $x_0 = \beta$, $n_0 = \alpha - 1$

3.34 $S|\Theta = \theta \sim$ Normale$(-\theta, 1)$ et $\Theta \sim$ Normale$(-x_0/n_0, 1/n_0)$

4 Modèle de Bühlmann

4.1 Un assureur couvre une proportion égale d'hommes et de femmes contre les accidents d'automobile. Les femmes ont une probabilité d'accident de 20 % par année alors que les hommes ont une probabilité d'accident de 40 % par année. La distribution de la sévérité des sinistres est la suivante :

$$\Pr[X = x] = \begin{cases} 0{,}8, & x = 100 \\ 0{,}1, & x = 200 \\ 0{,}1, & x = 400. \end{cases}$$

On suppose qu'une personne ne peut avoir qu'un seul accident par année. Calculer le facteur de crédibilité pour un assuré selon le modèle de Bühlmann.

4.2 Vous roulez un dé régulier. Si vous obtenez 1, vous pigez dans l'urne A, si vous obtenez 2, 3 ou 4, vous pigez dans l'urne B et si vous obtenez 5 ou 6, vous pigez dans l'urne C. Chaque urne contient des balles rouges et blanches dans les proportions ci-dessous.

	Balles rouges	Balles blanches
Urne A	75 %	25 %
Urne B	50 %	50 %
Urne C	25 %	75 %

Vous roulez le dé et pigez dans l'urne correspondante cinq balles avec remise dont vous avez pris la couleur en note. Vous emmenez ensuite l'urne en question à un ami et il y pige à son tour cinq balles, toujours avec remise. Si vous ne vous souvenez plus ni du nombre indiqué par le dé, ni de quelle urne les balles ont été tirées, mais que vous avez toujours en note que vous avez pigé trois balles rouges, quel est l'estimation du nombre de balles rouges que pigera votre ami selon le modèle de crédibilité de Bühlmann ?

4.3 On vous donne les informations suivantes sur un portefeuille de risques indépendants.

i) Les risques sont de deux types : type A et type B.

ii) Le nombre de risques de type A est le même que le nombre de risques de type B.

iii) Pour chaque risque, la probabilité d'avoir exactement un sinistre au cours d'une année est de 20 %, alors que la probabilité de n'avoir aucun sinistre est de 80 %.

iv) Le montant des sinistres des risques de type A est 2.

v) Le montant des sinistres des risques de type B est c, une constante inconnue.

Un risque est choisi au hasard au sein de ce portefeuille et le montant total des sinistres de ce risque est observé pour la première année. Vous souhaitez estimer le montant total des sinistres espéré pour la seconde année.

a) Quel est le modèle utilisé ici ?

b) Déterminer la limite du facteur de crédibilité dans le modèle de Bühlmann lorsque c tend vers l'infini.

4.4 Un portefeuille d'assurance est composé de 25 % de bons risques, 60 % de risques moyens et 15 % de mauvais risques. Tous les risques ont une distribution de sinistres de type gamma, mais dont les paramètres diffèrent selon le tableau ci-dessous.

Type de risque	α	λ
Bon	4	2
Moyen	4	1
Mauvais	10	2

Le dossier de sinistre d'un risque choisi au hasard est de 1 et 2 au cours des deux premières années. Calculer la prime de crédibilité de ce risque pour la troisième année selon le modèle de Bühlmann.

4.5 Un portefeuille d'assurance compte quatre classes d'assurés. Les caractéristiques de la distribution du montant total des sinistres annuels d'un assuré pour chacune des classes sont données dans le tableau suivant.

		Montant total des sinistres	
Classe	Nombre d'assurés	Moyenne	Variance
A	1 000	50	100 000
B	2 000	200	500 000
C	1 000	500	500 000
D	1 000	1 000	500 000

Calculer la prime de crédibilité chargée à un assuré ayant subi pour 800 $ de sinistres en quatre ans.

4.6 Un portefeuille d'assurance est composé de 30 % de bons risques, 50 % de risques moyens et 20 % de mauvais risques. La distribution des montants de sinistres est telle que présentée dans le tableau ci-dessous.

Type de risque	Distribution des sinistres
Bons	Pareto$(4, 1\,200)$
Moyens	Gamma$(1\,000, 2)$
Mauvais	Exponentielle$(0{,}00125)$

Selon le modèle de Bühlmann, quel facteur de crédibilité convient-il d'accorder après quatre années à un risque issu de ce portefeuille ?

4.7 La sévérité des sinistres pour un certain type d'assurance obéit à une loi gamma de paramètre de forme $\alpha = 5$ et de paramètre d'échelle θ variable par assuré. Les bons assurés ont une prime de risque de 2 500 $, les assurés moyens, une prime de risque de 4 000 $, et les mauvais assurés une prime de risque de 5 000 $. L'actuaire responsable de la tarification pour ce type d'assurance estime que le portefeuille est composé de 30 % de bons assurés, de 50 % de moyens et de 20 % de mauvais. Calculer à l'aide du modèle de Bühlmann la prime de crédibilité d'un assuré ayant encouru un total de 20 000 $ de sinistres au cours des quatre années précédentes.

4.8 Soit $N_t | \Theta = \theta \sim$ Géométrique(θ), où la fonction de densité de probabilité de Θ est

$$u(\theta) = 30(\theta^2 - 2\theta^3 + \theta^4), \quad 0 < \theta < 1.$$

a) Calculer $E[N_t]$.

b) Sachant que $N_1 = 0$, estimer N_2 par l'approche bayesienne pure.

c) Répéter la partie b) à l'aide du modèle de Bühlmann.

4.9 Déterminer la prime de crédibilité dans le modèle de Bühlmann selon les hypothèses suivantes :

a) $S|\Theta \sim$ Bernoulli(Θ), $\Theta \sim$ Bêta(α, β).

b) $S|\Theta \sim$ Géométrique(Θ), $\Theta \sim$ Bêta(α, β).

c) $S|\Theta \sim$ Gamma(τ, Θ), $\Theta \sim$ Gamma(α, λ).

d) $S|\Theta \sim$ Binomiale négative(r, Θ), $\Theta \sim$ Bêta(α, β).

e) $S|\Theta \sim$ Normale$(5\Theta, \sigma^2)$, $\Theta \sim U(a, b)$.

f) $S|\Theta \sim$ Exponentielle(Θ), $\Theta^{-1} \sim$ Bêta(α, β).

4.10 a) Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire et Y une variable aléatoire dont le second moment existe. Trouver les constantes α et β qui minimisent

$$E[(Y - \alpha - \beta\bar{X})^2],$$

où $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$. C'est un problème analogue à celui des moindres carrés ordinaires.

b) Considérer maintenant le modèle en théorie de la crédibilité de précision, soit où $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires conditionnellement indépendantes sachant Θ. Trouver $\mathrm{Cov}(\mu(\Theta), \bar{X})$ et $\mathrm{Var}[\bar{X}]$, où $\mu(\Theta) = E[X_t|\Theta]$.

c) Toujours dans le même contexte qu'en b), utiliser le résultat en a) pour trouver les constantes α et β qui minimisent

$$E[(\mu(\Theta) - \alpha - \beta\bar{X})^2].$$

4.11 On vous donne les informations suivantes :

i) X_i est le nombre de sinistres du conducteur i au cours d'une année.

ii) La distribution de X_i est une binomiale négative de paramètres r_i et $p = 0{,}4$.

iii) μ_i est l'espérance du nombre de sinistres du conducteur i pour une année.

iv) La distribution de μ_i est une exponentielle de moyenne 0,2.

Déterminer le facteur de crédibilité d'un conducteur ayant une année d'expérience selon le modèle de Bühlmann.

4.12 Un certain groupe de conducteurs a une fréquence espérée de sinistres (par année) distribuée uniformément entre 0,1 et 0,3. Le nombre de sinistres observés (par année) pour chaque conducteur obéit à une loi de Poisson. Un conducteur du groupe a eu trois accidents au cours des cinq dernières années. Estimer, à l'aide du modèle de Bühlmann, la fréquence future des sinistres pour cet assuré.

4.13 La distribution conditionnelle du montant des sinistres est normale de moyenne Θ et de variance $4\Theta^2$. La distribution de la variable aléatoire $\sigma^2(\Theta)/\mu(\Theta)$ est uniforme sur l'intervalle $(0, 40)$. Calculer la prime de crédibilité pour la cinquième année dans le modèle de Bühlmann si la somme des sinistres des quatre premières années est égale à 12.

4.14 En utilisant le modèle de Bühlmann et les hypothèses de distributions ci-dessous, trouver la prime de crédibilité pour la sixième année sachant qu'un assuré a eu au cours des cinq premières années les montants de sinistre suivants : 3, 1, 5, 4, 2.

a) $S|\Theta \sim \text{Poisson}(\theta)$ et

i) $\Theta \sim \text{Gamma}(10, 5)$.

ii) $\Theta \sim \text{Gamma}(50, 25)$.

iii) $\Theta \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

b) $S|\Theta \sim U(0, 2\theta)$ et

i) $\Theta \sim \text{Gamma}(10, 5)$.

ii) $\Theta \sim \text{Gamma}(50, 25)$.

iii) $\Theta \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

4.15 On pose $S_j|\Theta = \theta \sim N(\theta, \theta^2)$ et $\Theta \sim N(150, 4\,500)$. Trouver, selon le modèle de Bühlmann, la prime de crédibilité pour la cinquième année si $S_1 = 100$, $S_2 = 125$, $S_3 = 75$ et $S_4 = 120$.

4.16 On a deux portefeuilles d'assurance pour lesquels on voudrait calculer la crédibilité de l'expérience de chaque police en utilisant le modèle de Bühlmann. Pour le portefeuille A, la variance de la prime de risque représente 25 % de la variance du montant des sinistres. Pour le portefeuille B, le montant des sinistres pour un assuré quelconque suit une loi normale de moyenne μ et de variance 25. La prime de risque est elle-même distribuée dans la population selon une loi normale de moyenne α et variance 16. Indiquer quel portefeuille mérite la plus grande crédibilité.

4.17 a) Soit $S|\Theta \sim \text{Poisson}(\Theta)$ avec $\Theta \sim \text{Exponentielle}(\lambda)$. Calculer la constante K du modèle de Bühlmann sachant que la probabilité que la prime de risque soit supérieure à 5 est e^{-10}.

b) Soit maintenant $S_1|\Theta_1 \sim \text{Poisson}(\Theta_1)$ avec $\Theta_1 \sim \text{Exponentielle}(\alpha)$, et $S_2|\Theta_2 \sim \text{Poisson}(\Theta_2)$ avec $\Theta_2 \sim \text{Exponentielle}(\lambda)$. On suppose de plus que

i) S_1 est indépendante de S_2 et Θ_2 ;

ii) S_2 est indépendante de S_1 et Θ_1 ;

iii) Θ_1 et Θ_2 sont indépendantes.

Trouver la constante de crédibilité K pour $S = S_1 + S_2$.

4.18 Pour un groupe d'assurés détenant une police d'assurance contre le vol, un actuaire sait que 25 % de la variance totale du montant des sinistres est expliquée par la variance de la prime de risque. Après n années d'observation, un membre du groupe a eu des vols annuels de 125 \$ en moyenne, et il a payé une prime de crédibilité de 110 \$. Après $n+1$ années, sa moyenne est passée à 150 \$ et il a payé une prime de crédibilité de 125 \$. À partir de ces données, quelle prime de crédibilité l'actuaire devra-t-il charger à un autre membre du groupe pour l'année $n+1$ si celui-ci a eu des vols totalisant 500 \$ après n années ?

4.19 La distribution conditionnelle de $S|\Theta$ n'est pas connue mais on sait que $\mu(\Theta)$ suit une loi Gamma$(6,4)$. De plus, $\sigma^2(\Theta) = \mu(\Theta)^2$. En appliquant le modèle de Bühlmann, on obtiendrait les primes du tableau ci-dessous.

	Montant total des sinistres						
Années d'expérience	0	1	2	3	4	5	6
2	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,6}$
3	$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,3}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$a_{3,6}$
4	$a_{4,0}$	$a_{4,1}$	$a_{4,4}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	$a_{4,6}$

Lesquels des énoncés suivants sont vrais ?

I. $a_{2,3} \leq a_{3,5}$

II. $a_{2,2} \leq a_{4,4}$

III. $a_{2,4} < a_{3,6}$

4.20 On vous donne les informations suivantes :

i) $\Pr[S = x|\Theta = \theta] = e^{-\theta}\theta^x/x!$, $x = 0, 1, \dots$;

ii) $u(\theta) = c\theta^2 e^{-4\theta}$, $\theta > 0$.

a) Calculer la prime collective.

b) Sachant que $S_1 = 4$, $S_2 = 1$ et $S_3 = 3$, calculer les primes de crédibilité pour les deuxième, troisième et quatrième années.

4.21 Le montant total des sinistres a une distribution exponentielle de paramètre de risque inconnu et la moyenne de cette distribution suit une loi gamma de moyenne 4 et de variance 8. Trouver la prime de crédibilité de troisième année dans le modèle de Bühlmann si les sinistres totaux au cours des deux premières années furent respectivement de 1 et 3.

4.22 Démontrer que la prime de crédibilité dans le modèle de Bühlmann est de type «mise à jour» (Gerber et Jones, 1975), c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\pi_{n+1} = \zeta_n \pi_n + (1 - \zeta_n) S_n,$$

où $0 \leq \zeta_n \leq 1$ est une fonction de n, le nombre d'années d'expérience disponible, et π_n est la prime de crédibilité de l'année précédente.

4.23 Démontrer que l'estimateur $\hat{s}^2$ du modèle classique de Bühlmann est sans biais en calculant $E[(S_{it} - \bar{S}_i)^2]$ sans d'abord conditionner sur Θ_i.

4.24 Proposer un modèle pouvant servir pour la simulation de données dans une application du modèle de Bühlmann. Le modèle devrait

i) respecter les deux principales hypothèses du modèle de Bühlmann, à savoir $E[S_{it}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$ et $\mathrm{Var}[S_{it}|\Theta_i] = \sigma^2(\Theta_i)$;

ii) permettre de simuler des montants individuels de sinistres (et non pas seulement le montant total).

4.25 À partir des données de sinistres ci-dessous, calculer les primes de crédibilité de Bühlmann de l'année 7 pour chacun des trois contrats.

	Années					
Contrat	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	1	2	0
2	3	4	2	1	4	4
3	3	3	2	1	2	1

Exercices proposés dans *Loss Models*

2[e] édition : 16.22 k, l), 16.23 k, l), 16.34, 16.35 a), 16.36, 16.38, 16.39, 16.42, 16.52, 16.54, 16.64, 16.65.

3[e] édition : 20.24 k, l), 20.25 k, l), 20.36, 20.37 a), 20.38, 20.40, 20.41, 20.44, 20.54, 20.56, 20.72, 20.73.

Réponses

4.1 $n/(n+32{,}86)$

4.2 2,5770

4.3 b) $1/9$

4.4 2,78

4.5 290,93

4.6 0,2640

4.7 4 402,61

4.8 a) 1,5 b) 1 c) 1

4.9 On ne donne que la valeur de la constante K dans le facteur de crédibilité. a) $\alpha+\beta$ b) $\alpha-1$ c) $(\alpha-1)/\tau$ d) $(\alpha-1)/r$ e) $12\sigma^2/(25(b-a)^2)$ f) $(\alpha+\beta)(\alpha+1)/\beta$

4.10 a) $\hat{\alpha}=E[Y]-\hat{\beta}E[\bar{X}]$, $\hat{\beta}=\mathrm{Cov}(Y,\bar{X})/\mathrm{Var}[\bar{X}]$ b) $\mathrm{Cov}(\mu(\Theta),\bar{X})=a$, $\mathrm{Var}[\bar{X}]=a+s^2/n$

4.11 0,0741

4.12 0,23

4.13 4,6

4.14 a) i) 2,5 ii) 2,17 iii) 2,95
b) i) 2,58 ii) 2,23 iii) 2,91

4.15 132

4.16 Portefeuille B

4.17 a) 2 b) $\alpha\lambda(\alpha+\lambda)/(\alpha^2+\lambda^2)$

4.18 160

4.19 I et III

4.20 a) 0,75 b) 1,4, 1,33 et 1,57

4.21 3,2

4.25 1,18, 2,82 et 2

5 Modèle de Bühlmann–Straub

5.1 Démontrer les relations suivantes.

a) $\operatorname{Cov}(X_{iw}, X_{ww}) = a\,\dfrac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} + \dfrac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}}$

b) $\operatorname{Var}[X_{ww}] = a \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \left(\frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \right)^2 + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}}.$

c) $\operatorname{Var}[X_{zw}] = \dfrac{a}{z_\Sigma}$

5.2 Démontrer que l'estimateur $\hat{s}^2$ est sans biais.

5.3 Démontrer que l'estimateur $\hat{a}$ est sans biais.

5.4 Démontrer que l'estimateur $\tilde{a}$ est sans biais.

5.5 Pourquoi n'a-t-on pas un équivalent de l'estimateur $\tilde{a}$ dans le modèle de Bühlmann ? Démontrer que $\hat{a} = \tilde{a}$ dans le modèle de Bühlmann, c'est-à-dire lorsque tous les poids sont égaux.

5.6 Démontrer que lorsque tous les facteurs de crédibilité sont nuls (situation qui survient principalement lorsque $a = 0$), alors $X_{zw} = X_{ww}$. Autrement dit, démontrer que

$$\lim_{a \to 0} X_{zw} = X_{ww}$$

5.7 Proposer un modèle pouvant servir pour la simulation de données dans une application du modèle de Bühlmann–Straub. Le modèle devrait

i) respecter les deux principales hypothèses du modèle de Bühlmann–Straub, à savoir $E[X_{it}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$ et $\operatorname{Var}[X_{it}|\Theta_i] = \sigma^2(\Theta_i)/w_{it}$;

ii) permettre de simuler des montants individuels de sinistres (et non pas seulement le montant total).

Supposer les poids w_{it} connus.

5.8 Considérer le tableau suivant où S_{it} est le montant total des sinistres et w_{it} la masse salariale pour l'employeur i dans l'année t.

S_{it}

	Année			
Employeur	1	2	3	4
1	14	21	12	18
2	4	0	4	6
3	3	0	1	6

w_{it}

	Année			
Employeur	1	2	3	4
1	2	3	4	3
2	4	2	1	2
3	3	3	1	3

Calculer la prime de crédibilité (totale) de l'employeur 1 pour la cinquième année pour trois unités de masse salariale.

5.9 Calculer la prime de crédibilité pour chacun des trois contrats du portefeuille ci-dessous.

Ratios X_{it}

	Année				
Contrat	1	2	3	4	5
1	3	5	–	–	4
2	6	8	8	14	4
3	–	2	0	3	6

Poids w_{it}

	Année				
Contrat	1	2	3	4	5
1	1	1	–	–	1
2	2	2	2	2	2
3	–	3	3	3	3

a) Faire les calculs «à la main». Utiliser $\hat{a}$ comme estimateur du paramètre a.

b) Faire les calculs en R à l'aide de la fonction `cm` de la version 0.9-4 ou ultérieure du package `actuar` (Dutang et collab., 2008). Utiliser $\tilde{a}$ comme estimateur du paramètre a. Comparer les réponses avec celles obtenues en a).

5.10 On vous donne les informations suivantes :

$$\begin{aligned} K &= 15 & X_{zw} &= 0{,}8 \\ X_{1w} &= 0{,}89 & w_{1\Sigma} &= 8 \\ X_{2w} &= 0{,}85 & w_{2\Sigma} &= 6 \\ X_{3w} &= 0{,}65 & & \\ X_{4w} &= 0{,}70 & w_{4\Sigma} &= 9. \end{aligned}$$

Calculer le facteur de crédibilité du contrat 3.

Exercices proposés dans *Loss Models*

2e édition : 16.60, 16.61, 16.63.

2e édition : 20.27, 20.68, 20.70.

Réponses

5.8 15,52

5.9 a) $\hat{s}^2 = 18{,}9167$, $\hat{a} = 7{,}7901$, $\hat{m} = 4{,}9954$, $\pi_{1,6} = 4{,}4453$, $\pi_{2,6} = 7{,}4129$, $\pi_{3,6} = 3{,}1279$

b) $\hat{s}^2 = 18{,}9167$, $\tilde{a} = 5{,}5653$, $\hat{m} = 5{,}0084$, $\pi_{1,6} = 4{,}5357$, $\pi_{2,6} = 7{,}2411$, $\pi_{3,6} = 3{,}2485$

5.10 0,0539

A Formules de crédibilité exacte

Le tableau de la page suivante contient les principaux résultats de crédibilité bayesienne pour les combinaisons de distributions de la famille exponentielle univariée. Le contenu des colonnes du tableau est le suivant, dans l'ordre :

1. La distribution de $S|\Theta = \theta$;
2. La distribution a priori de Θ ;
3. La distribution marginale de S ;
4. La distribution a posteriori de $\Theta|S_1 = x_1, \dots, S_n = x_n$, toujours du même type que la distribution a priori, mais avec des paramètres mis à jour ;
5. La prime de risque $\mu(\theta) = E[S|\Theta = \theta]$;
6. La prime collective $m = E[\mu(\Theta)]$;
7. La prime bayesienne $B_{n+1} = E[\mu(\Theta)|S_1, \dots, S_n]$, toujours égale à la prime collective évaluée avec les paramètres de la distribution a posteriori ;
8. Le facteur de crédibilité dans l'expression de la prime bayesienne sous forme de prime de crédibilité.

Les fonctions de masse ou de densité de probabilité des lois figurant au tableau se trouvent à l'annexe B.

$f(x\mid\theta)$	$u(\theta)$	$f(x)$	$u(\theta\mid x_1,\dots,x_n)$	$\mu(\theta)$	m	B_{n+1}	z
Bernoulli(θ)	Bêta(α,β)	Bernoulli$(\alpha/(\alpha+\beta))$	Bêta$(\tilde\alpha,\tilde\beta)$ $\tilde\alpha=\alpha+\sum_t x_t$ $\tilde\beta=\beta+n-\sum_t x_t$	θ	$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\dfrac{\alpha+\sum_t S_t}{\alpha+\beta+n}$	$\dfrac{n}{n+\alpha+\beta}$
Géometrique(θ)	Bêta(α,β)	$\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+x+1)}$	Bêta$(\tilde\alpha,\tilde\beta)$ $\tilde\alpha=\alpha+n$ $\tilde\beta=\beta+\sum_t x_t$	$\dfrac{1-\theta}{\theta}$	$\dfrac{\beta}{\alpha-1}$	$\dfrac{\beta+\sum_t S_t}{\alpha+n-1}$	$\dfrac{n}{n+\alpha-1}$
Poisson(θ)	Gamma(α,λ)	Bin. nég.$(\alpha,\lambda/(\lambda+1))$	Gamma$(\tilde\alpha,\tilde\lambda)$ $\tilde\alpha=\alpha+\sum_t x_t$ $\tilde\lambda=\lambda+n$	θ	$\dfrac{\alpha}{\lambda}$	$\dfrac{\alpha+\sum_t S_t}{\lambda+n}$	$\dfrac{n}{n+\lambda}$
Exponentielle(θ)	Gamma(α,λ)	Pareto(α,λ)	Gamma$(\tilde\alpha,\tilde\lambda)$ $\tilde\alpha=\alpha+n$ $\tilde\lambda=\lambda+\sum_t x_t$	$\dfrac{1}{\theta}$	$\dfrac{\lambda}{\alpha-1}$	$\dfrac{\lambda+\sum_t S_t}{\alpha+n-1}$	$\dfrac{n}{n+\alpha-1}$
Normale(θ,σ_2^2)	Normale(μ,σ_1^2)	Normale$(\mu,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$	Normale$(\tilde\mu,\tilde\sigma_1^2)$ $\tilde\mu=\dfrac{\sigma_1^2\sum_t x_t+\sigma_2^2\mu}{n\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ $\tilde\sigma_1^2=\dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{n\sigma_1^2+\sigma_2^2}$	θ	μ	$\dfrac{\sigma_1^2\sum_t S_t+\sigma_2^2\mu}{n\sigma_1^2+\sigma_2^2}$	$\dfrac{n}{n+\sigma_2^2/\sigma_1^2}$

B Paramétrisation des lois de probabilité

Cette annexe précise la paramétrisation des lois de probabilité utilisée dans les énoncés des exercices des chapitres 2 à 5 ainsi que dans le tableau des formules de crédibilité exacte de l'annexe A. Dans certains cas, la paramétrisation est différente de celle présentée dans les annexes A et B de Klugman et collab. (2004, 2008).

On fournit également l'espérance, la variance et la fonction génératrice des moments (lorsqu'elle existe) des différentes lois.

B.1 Distributions discrètes

B.1.1 Binomiale(n, θ)

Paramètres : $0 \leq \theta \leq 1$, n entier. Cas spécial : Bernoulli(θ) lorsque $n = 1$.

$$
\begin{aligned}
\Pr[X = x] &= \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots \\
E[X] &= n\theta \\
\mathrm{Var}[X] &= n\theta(1-\theta) \\
M(t) &= (1 - \theta + \theta e^t)^n
\end{aligned}
$$

B.1.2 Binomiale négative(r, θ)

Paramètres : $0 \leq \theta \leq 1$, $r > 0$. Cas spécial : Géométrique(θ) lorsque $r = 1$.

$$
\begin{aligned}
\Pr[X = x] &= \binom{x+r-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, \dots \\
E[X] &= \frac{r(1-\theta)}{\theta} \\
\mathrm{Var}[X] &= \frac{r(1-\theta)}{\theta^2} \\
M(t) &= \left(\frac{\theta}{1 - (1-\theta)e^t} \right)^r
\end{aligned}
$$

B.1.3 Poisson(λ)

Paramètre : $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} \Pr[X = x] &= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots \\ E[X] &= \lambda \\ \mathrm{Var}[X] &= \lambda \\ M(t) &= e^{\lambda(e^t - 1)} \end{aligned}$$

B.2 Distributions continues

B.2.1 Bêta(α, β)

Paramètres : $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Cas spécial : Uniforme$(0, 1)$ lorsque $\alpha = \beta = 1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1 \\ E[X] &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \mathrm{Var}[X] &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \end{aligned}$$

B.2.2 Gamma(α, λ)

Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Cas spéciaux : Exponentielle(λ) lorsque $\alpha = 1$, $\chi^2(r)$ lorsque $\alpha = r/2$ et $\lambda = 1/2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \\ E[X] &= \frac{\alpha}{\lambda} \\ \mathrm{Var}[X] &= \frac{\alpha}{\lambda^2} \\ M(t) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha \end{aligned}$$

B.2.3 Normale(μ, σ^2)

Paramètres : $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty \\ E[X] &= \mu \\ \mathrm{Var}[X] &= \sigma^2 \\ M(t) &= e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \end{aligned}$$

B.2.4 Log-normale(μ, σ^2)

Si $X \sim \text{Normale}(\mu, \sigma^2)$, alors $Y = e^X \sim \text{Log-normale}(\mu, \sigma^2)$. Paramètres : $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x > 0 \\
E[X] &= e^{\mu + \sigma^2/2} \\
\text{Var}[X] &= e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)
\end{aligned}$$

B.2.5 Pareto(α, λ)

Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(x + \lambda)^{\alpha + 1}}, \quad x > 0 \\
E[X] &= \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1 \\
\text{Var}[X] &= \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2
\end{aligned}$$

B.2.6 Pareto généralisée(α, λ, τ)

Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\tau > 0$. Cas spécial : Pareto(α, λ) lorsque $\tau = 1$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha + \tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \frac{\lambda^\alpha x^{\tau - 1}}{(x + \lambda)^{\alpha + \tau}}, \quad x > 0 \\
E[X] &= \frac{\lambda \tau}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1 \\
\text{Var}[X] &= \frac{\lambda^2 \tau(\alpha + \tau - 1)}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2
\end{aligned}$$

B.3 Distributions composées

Soit $S = X_1 + \dots + X_N$, où $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, identiquement distribuées et toutes indépendantes de N. On a toujours

$$\begin{aligned}
E[S] &= E[N]E[X] \\
\text{Var}[S] &= \text{Var}[N]E[X]^2 + E[N]\text{Var}[X].
\end{aligned}$$

B.3.1 Binomiale composée$(n, \theta, F_X(\cdot))$

Distribution de S lorsque $N \sim \text{Binomiale}(n, \theta)$ et $\Pr[X \leq x] = F_X(x)$.

$$\begin{aligned} E[S] &= n\theta E[X] \\ \text{Var}[S] &= n\theta(1-\theta)E[X]^2 + n\theta\text{Var}[X] \end{aligned}$$

B.3.2 Binomiale négative composée$(r, \theta, F_X(\cdot))$

Distribution de S lorsque $N \sim \text{Binomiale négative}(r, \theta)$ et $\Pr[X \leq x] = F_X(x)$.

$$\begin{aligned} E[S] &= \frac{r(1-\theta)}{\theta} E[X] \\ \text{Var}[S] &= \frac{r(1-\theta)}{\theta^2} E[X]^2 + \frac{r(1-\theta)}{\theta} \text{Var}[X] \end{aligned}$$

B.3.3 Poisson composée$(\lambda, F_X(\cdot))$

Distribution de S lorsque $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ et $\Pr[X \leq x] = F_X(x)$.

$$\begin{aligned} E[S] &= \lambda E[X] \\ \text{Var}[S] &= \lambda E[X^2] \end{aligned}$$

C Table de quantiles de la loi normale

$$\Pr[X \leq x] = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \, dy$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500	1,10	0,864	2,05	0,980
0,05	0,520	1,15	0,875	2,10	0,982
0,10	0,540	1,20	0,885	2,15	0,984
0,15	0,560	1,25	0,894	2,20	0,986
0,20	0,579	1,282	0,900	2,25	0,988
0,25	0,599	1,30	0,903	2,30	0,989
0,30	0,618	1,35	0,911	2,326	0,990
0,35	0,637	1,40	0,919	2,35	0,991
0,40	0,655	1,45	0,926	2,40	0,992
0,45	0,674	1,50	0,933	2,45	0,993
0,50	0,691	1,55	0,939	2,50	0,994
0,55	0,709	1,60	0,945	2,55	0,995
0,60	0,726	1,645	0,950	2,576	0,995
0,65	0,742	1,65	0,951	2,60	0,995
0,70	0,758	1,70	0,955	2,65	0,996
0,75	0,773	1,75	0,960	2,70	0,997
0,80	0,788	1,80	0,964	2,75	0,997
0,85	0,802	1,85	0,968	2,80	0,997
0,90	0,816	1,90	0,971	2,85	0,998
0,95	0,829	1,95	0,974	2,90	0,998
1,00	0,841	1,96	0,975	2,95	0,998
1,05	0,853	2,00	0,977	3,00	0,999

D Solutions

Chapitre 2

Remarques

1. Afin d'éviter toute confusion avec le facteur de crédibilité, le $100(1-\varepsilon)^{\text{e}}$ quantile d'une loi normale centrée réduite est noté ζ_ε, c'est-à-dire que
$$\Pr[Z > \zeta_\varepsilon] = \varepsilon,$$
où $Z \sim N(0,1)$.
2. Dans les discussions sur la crédibilité complète de niveau (k, p), on pose toujours $\varepsilon = 1 - p$.

2.1 On a $S = X_1, \dots, X_N$ avec $N \sim \text{Binomiale}(1\,000, 0{,}6)$ et $X \sim \text{Log}-\text{normale}(3, 4)$, d'où $E[N] = (1\,000)(0{,}6) = 600$, $\text{Var}[N] = (1\,000)(0{,}6)(1-0{,}6) = 240$, $E[X] = e^{3+4/2} = e^5$ et $\text{Var}[X] = e^{2\cdot 3+4}(e^4-1) = e^{10}(e^4-1)$. Alors,
$$\begin{aligned}
E[S] &= E[N]E[X] \\
&= 600\,e^5 \\
&= 89\,047 \\
\text{Var}[S] &= E[N]\text{Var}[X] + \text{Var}[N]E[X]^2 \\
&= 600\,e^{10}(e^4-1) + 240\,e^{10} \\
&= 713\,633\,042.
\end{aligned}$$

2.2 On a $E[S] = E[N]E[X]$ et $\text{Var}[S] = E[N]\text{Var}[X] + E[X]^2\text{Var}[N]$. Or, $E[N] = 4(0{,}5)/(1-0{,}5) = 4$, $\text{Var}[N] = 4(0{,}5)/(1-0{,}5)^2 = 8$, $E[X] = 2/0{,}5 = 4$ et $\text{Var}[X] = 2/0{,}5^2 = 8$, d'où
$$E[S] = (4)(4) = 16$$
et
$$\text{Var}[S] = (4)(8) + (4^2)(8) = 160.$$

2.4 Puisque $E[\bar{S}] = E[S]$ et $\mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[S]/n$, l'inégalité

$$\Pr\left[(1-k)E[\bar{S}] \leq \bar{S} \leq (1+k)E[\bar{S}]\right] \geq p$$

est satisfaite lorsque

$$n \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \frac{\mathrm{Var}[S]}{E[S]^2}.$$

Dans le cas d'une Poisson composée, $E[S] = \lambda E[X]$ et $\mathrm{Var}[S] = \lambda(\mathrm{Var}[X] + E[X]^2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} n &\geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \frac{\mathrm{Var}[X] + E[X]^2}{\lambda E[X]^2} \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \left(1 + \frac{\mathrm{Var}[X]}{E[X]^2}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 (1 + \mathrm{CV}(X)^2), \end{aligned}$$

où $\mathrm{CV}(X)$ est le coefficient de variation de X.

2.5 a) On sait que dans le cas d'une Poisson composée, la crédibilité complète est donnée par

$$\lambda \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \left(1 + \frac{\mathrm{Var}[X]}{E[X]^2}\right).$$

On a $E[X] = \theta/(\alpha - 1) = 1/40$ et $\mathrm{Var}[X] = \alpha\theta^2/((\alpha-1)^2(\alpha-2)) = 3/1\,600$. Comme on exige un niveau de crédibilité de 90 %, $\zeta_{\varepsilon/2} = 1{,}645$. En isolant k dans la formule, on obtient

$$k \geq \frac{1{,}645}{\sqrt{256}}\sqrt{1 + \frac{3/1\,600}{1/1\,600}} = 0{,}2056 = 20{,}56\ \%.$$

On obtient une grande valeur de k parce que la distribution du montant des sinistres est très asymétrique. Pour obtenir une valeur de k plus usuelle (de l'ordre de 5 %), il faudrait augmenter le paramètre de Poisson, de manière à sommer un plus grand nombre de lois de Pareto.

b) De manière similaire, mais en utilisant plutôt la formule

$$n \geq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \left(1 + \frac{\mathrm{Var}[X]}{E[X]^2}\right)$$

obtenue à l'exercice 2.4 avec $n = 10$, on obtient

$$k \geq \frac{1}{\sqrt{256}} \frac{1{,}645}{\sqrt{10}} \sqrt{1 + \frac{3/1\,600}{1/1\,600}} = 0{,}065 = 6{,}5\ \%.$$

La marge d'erreur est plus petite qu'en a) puisque la distribution de $\bar{S}$ après 10 années est le résultat de la somme d'un beaucoup plus grand nombre de sinistres.

2.6 On a un cas binomiale pure, c'est-à-dire $S \sim \text{Binomiale}(n,\theta)$. À partir de la formule générale

$$E[S] \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)\sqrt{\text{Var}[S]}$$

et avec $E[S] = n\theta$ et $\text{Var}[S] = n\theta(1-\theta)$, on obtient

$$n \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \frac{1-\theta}{\theta}.$$

2.7 Dans un tel cas normale pure, la formule générale

$$E[S] \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)\sqrt{\text{Var}[S]}$$

devient simplement

$$\mu \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)\sigma.$$

a) On a $k = 0{,}04$ et $p = 0{,}95$ d'où $\zeta_{0{,}025} = 1{,}96$ et donc $\mu \geq 49\sigma$.

b) On a $k = 0{,}05$ et $p = 0{,}90$ d'où $\zeta_{0{,}05} = 1{,}645$ et donc $\mu \geq 32{,}9\sigma$.

c) On a $k = 0{,}01$ et $p = 0{,}98$ d'où $\zeta_{0{,}01} = 2{,}326$ et donc $\mu \geq 232{,}6\sigma$.

2.8 On sait que $\bar{S} \sim N(\mu, \sigma^2/9)$. On a donc une crédibilité complète d'ordre (k,p) lorsque

$$E[\bar{S}] \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)\sqrt{\text{Var}[\bar{S}]},$$

soit

$$\mu \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)\frac{\sigma}{3}.$$

a) On a $k = 0{,}05$ et $p = 0{,}90$ d'où $\zeta_{0{,}05} = 1{,}645$ et $\mu \geq 10{,}97\sigma$.

b) On a $k = 0{,}05$ et $p = 0{,}95$ d'où $\zeta_{0{,}025} = 1{,}96$ et $\mu \geq 13{,}07\sigma$.

c) On a $k = 0{,}01$ et $p = 0{,}90$ d'où $\zeta_{0{,}05} = 1{,}645$ et $\mu \geq 54{,}83\sigma$.

d) On a $k = 0{,}01$ et $p = 0{,}95$ d'où $\zeta_{0{,}025} = 1{,}96$ et $\mu \geq 65{,}33\sigma$.

2.9 On détermine tout d'abord une formule générale pour le cas de la binomiale négative composée. Sachant que $E[N] = r(1-\theta)/\theta$ et que $\text{Var}[N] = r(1-\theta)/\theta^2$, on obtient

$$r \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \left(\frac{1}{1-\theta} + \frac{\theta}{1-\theta}\frac{\text{Var}[X]}{E[X]^2}\right).$$

Or, dans cet exercice, $\theta = 0{,}01$, $\text{Var}[X]/E[X]^2 = 1/\alpha = 50$ et $\zeta_{\varepsilon/2}/k = 1{,}96/0{,}05 = 39{,}2$. Par conséquent, $r \geq 2\,328{,}24$.

2.10 On remarquera tout d'abord que le contexte est celui de l'exercice 2.4, sauf que le critère de crédibilité complète est exprimé non pas en nombre d'années d'expérience, n, mais plutôt en nombre total de sinistres espéré, soit $n\lambda$. On a donc

$$n\lambda \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 (1 + \text{CV}(X)^2).$$

Or, dans le cas présent, $\text{CV}(X) = 0$ puisque $\Pr[X = M] = 1$ (distribution dégénérée en M), $k = 0{,}04$ et $\zeta_{0{,}05} = 1{,}645$, d'où $n\lambda \geq 1\ 692$.

2.11 a) Le montant total des sinistres a une distribution Poisson composée avec $E[X] = 5$, $\text{Var}[X] = 100$, $k = 0{,}03$ et $\zeta_{\varepsilon/2} = \zeta_{0{,}025} = 1{,}96$. De la formule générale

$$\lambda \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \left(1 + \frac{\text{Var}[X]}{E[X]^2}\right)$$

on obtient directement $\lambda \geq 21\ 343$.

b) Le nombre de sinistres a une distribution de Poisson pure. On peut donc utiliser la formule ci-dessus avec $\text{Var}[X] = 0$. On obtient alors $\lambda \geq 4\ 269$.

2.12 Soit X_A la variable aléatoire du montant des sinistres du groupe A et X_B la variable aléatoire du montant des sinistres du groupe B. On sait que $E[X_A] = 50$, $\text{Var}[X_A] = 0$ et que $X_B \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ tel que $\alpha/\lambda = 50$. De plus, la distribution du montant total des sinistres est une Poisson composée, donc le niveau de crédibilité complète est donné par

$$\lambda \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 (1 + \text{CV}(X)^2).$$

Pour le groupe A, on a $\lambda_A = 1\ 000$ et $\text{CV}(X_A) = 0$, d'où $(\zeta_{\varepsilon/2}/k)^2 = 1\ 000$. Ce facteur est identique pour le groupe B, mais $\lambda_B = 3\ 000$ et $\text{CV}(X_B) = 1/\sqrt{\alpha}$. On a donc

$$3\ 000 = 1\ 000 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right),$$

soit $\alpha = 1/2$. Enfin, de $\alpha/\lambda = 50$ on obtient que $\lambda = 1/100$.

2.13 Deux situations sont décrites : 1) la crédibilité complète est accordée à la fréquence des sinistres seulement ; 2) la crédibilité complète est accordée au montant total des sinistres. On nous donne donc d'abord le seuil de crédibilité complète dans un modèle avec distribution de Poisson pure (ou Poisson composée avec une distribution des montants de sinistres dégénérée en 1), puis on demande de déterminer le seuil dans un modèle avec distribution Poisson composée où la distribution du montant des sinistres a un coefficient de variation de $1/\sqrt{2}$. Toujours à partir de la formule

$$\lambda \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 (1 + \mathrm{CV}(X)^2)$$

on trouve dans un premier temps que

$$1\,000 = \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{0{,}05}\right)^2,$$

soit $\zeta_{\varepsilon/2} = 0{,}05\sqrt{1\,000}$. Dans un deuxième temps, on a

$$\begin{aligned}\lambda &\geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{0{,}25}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 1{,}5 \left(\frac{0{,}05\sqrt{1\,000}}{0{,}25}\right)^2 \\ &= 60.\end{aligned}$$

2.14 Il faut d'abord identifier le modèle pour la fréquence comme étant une Binomiale(n,θ), où n est le nombre d'employés et θ, la probabilité qu'un employé ait un accident. On doit considérer deux cas : premièrement la binomiale pure et deuxièmement la binomiale composée. La formule de crédibilité de stabilité générale est

$$E[S] \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right) \sqrt{\mathrm{Var}[S]}.$$

Si $S \sim$ Binomiale(n,θ), alors

$$n \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \frac{1-\theta}{\theta}$$

et, si $S \sim$ Binomiale composée$(n,\theta,F_X(\cdot))$,

$$n \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \left(\frac{1}{\theta}\mathrm{CV}(X)^2 + \frac{1-\theta}{\theta}\right).$$

(À noter que cette dernière équation revient à la première si $X = 1$ avec probabilité 1, c'est-à-dire si $\mathrm{CV}(X) = 0$.) On a que $\theta = 0{,}04$ et, dans le cas d'une binomiale pure, un niveau de crédibilité complète de $n = 6\,494$. Par conséquent, $(\zeta_{\varepsilon/2}/k)^2 = 270{,}5833$. En insérant cette valeur dans la formule pour la binomiale composée avec $\mathrm{CV}(X) = 2$, on obtient un niveau de crédibilité complète de $n = 33\,552$ employés.

2.15 Avec la distribution Poisson composée, le seuil de crédibilité complète est

$$\lambda \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \left(1 + \frac{\mathrm{Var}[X]}{E[X]^2}\right).$$

Or, on nous donne $E[X] = 100/(3-1) = 50$ et $\text{Var}[X] = 3 \cdot 100^2/((3-1)^2(3-2)) = 7\,500$. Si le seuil de crédibilité complète dans le cas Poisson composée est 2 500 quand $k = 0{,}05$, alors

$$\zeta_{\varepsilon/2} = 0{,}05\sqrt{\frac{2500}{1 + 7500/50^2}} = 1{,}25.$$

Dans le cas binomiale négative composée, le seuil de crédibilité complète est plutôt donné par

$$r \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \left(\frac{1}{1-\theta} + \frac{\theta}{1-\theta}\frac{\text{Var}[X]}{E[X]^2}\right).$$

Avec $\text{Var}[X]/E[X]^2 = 3$, $\theta = 0{,}5$, $r = 2\,500$ et $\zeta_{\varepsilon/2} = 1{,}25$, on obtient $k = 0{,}0559$, d'où la largeur de l'intervalle de confiance autour de la moyenne est $2kE[S] = 2(0{,}559)(2\,500)(50) = 13\,975$.

2.16 On a un cas binomiale négative composée. À l'aide de la formule développée au numéro 2.9, on trouve directement que

$$\begin{aligned} r &\geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \left(\frac{1}{1-\theta} + \frac{\theta}{1-\theta}\frac{\text{Var}[X]}{E[X]^2}\right) \\ &= \left(\frac{1{,}645}{0{,}05}\right)^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot 3\right) \\ &= 3\,247{,}23. \end{aligned}$$

2.17 a) Avec $X \equiv 1$, S est une Poisson pure et le seuil de crédibilité complète est $\lambda \geq (\zeta_{\varepsilon/2}/k)^2 = (1{,}645/0{,}05)^2 = 1082{,}41$.

b) Dans le cas Poisson composée avec $\text{CV}(X) = 1$, le seuil de crédibilité complète est $\lambda \geq (\zeta_{\varepsilon/2}/k)^2(1 + \text{CV}(X)^2) = 2(1{,}96/0{,}04)^2 = 4\,802$.

c) Sans plus de précisions sur la formule de crédibilité partielle à utiliser, on se rabattra sur la formule de la racine carrée. Pour une seule période d'expérience, on a $\bar{S} = S$, donc la crédibilité partielle z serait

$$z = \min\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{4\,802}}, 1\right\}.$$

2.18 On a un modèle Poisson composée pour le montant total des sinistres. Le seuil de crédibilité complète de 3 000 est atteint lorsque $\text{CV}(X) = 0$, donc $(\zeta_{\varepsilon/2}/k)^2 = 3\,000$. Si on a plutôt $\text{CV}(X)^2 = \alpha/(\alpha-2) = 3$, alors le seuil de crédibilité complète est $\lambda_0 = 3\,000(1+3) = 12\,000$. Enfin, si l'on a accordé à l'assuré une crédibilité partielle de $z = \sqrt{\lambda/12\,000} = 0{,}5$, alors c'est que l'assuré a eu $\lambda = 3\,000$ sinistres.

2.19 Il faut déduire de l'énoncé que la crédibilité complète est donnée en années d'expérience et que $\zeta_{\varepsilon/2} = 1{,}96$, $k = 0{,}05$, $\text{CV}(X) = 3$ et $\lambda = 1\,000$.

Puisque l'on a un modèle Poisson composée, le niveau de crédibilité complète n_0 est

$$n_0 = \frac{1}{1\,000}\left(\frac{1{,}96}{0{,}05}\right)^2(1 + (3)^2) = 15{,}3664.$$

Après $n = 1$ année d'expérience, le facteur de crédibilité est

$$z = \sqrt{1/15{,}3664} = 0{,}2551.$$

Puisque $\bar{S} = S_1 = 6{,}75$ et $m = 5{,}00$, la prime de crédibilité partielle est

$$P = 0{,}2551(6{,}75) + (1 - 0{,}2551)(5) = 5{,}45.$$

2.20 Soit λ la grandeur du portefeuille. Le seuil de crédibilité complète est $\lambda_0 = 103\,500$. En utilisant la formule de la racine carrée, on a donc

$$z = 0{,}67 = \sqrt{\frac{\lambda}{103\,500}},$$

d'où $\lambda = 46\,462$.

2.21 On a $E[S] = E[N]E[X] = 50{,}000$ et $\mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[N]E[X]^2 + \mathrm{Var}[X]E[N] = 312\,500\,000$. On trouve le seuil de crédibilité complète avec la formule générale

$$\begin{aligned} n_0 &= \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \frac{\mathrm{Var}[S]}{E[S]} \\ &= 270{,}6025(0{,}125) \\ &= 33{,}8253. \end{aligned}$$

a) Avec la formule de la racine carrée,

$$0{,}54 = \sqrt{\frac{n}{33{,}8253}} \Rightarrow n = 9{,}86.$$

b) Avec la formule «puissance 2/3»,

$$0{,}54 = \left(\frac{n}{33{,}8253}\right)^{2/3} \Rightarrow n = 13{,}42.$$

Le temps requis pour atteindre la pleine crédibilité est donc plus élevé avec cette formule.

Chapitre 3

3.1 Soit S le montant total des sinistres (ou le nombre de sinistres, car chaque sinistre est d'un montant de 1). Alors $S|\Theta \sim \text{Poisson}(\Theta)$ et Θ a une fonction de masse de probabilité

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} 0{,}35, & \theta = 1/10 = 0{,}1 \\ 0{,}40, & \theta = 2/10 = 0{,}2 \\ 0{,}25, & \theta = 6/10 = 0{,}6. \end{cases}$$

a) Par la loi des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \Pr[S = 1] &= \sum_\theta \Pr[S = 1|\Theta = \theta] \Pr[\Theta = \theta] \\ &= (0{,}1 e^{-0{,}1})(0{,}35) + (0{,}2 e^{-0{,}2})(0{,}40) + (0{,}6 e^{-0{,}6})(0{,}25) \\ &= 0{,}1795. \end{aligned}$$

b) Ici, $\mu(\theta) = E[S|\Theta = \theta] = \theta$. On a donc, $\mu(0{,}1) = 0{,}1$, $\mu(0{,}2) = 0{,}2$ et $\mu(0{,}6) = 0{,}6$.

c) $E[S] = E[\mu(\Theta)] = E[\Theta] = 0{,}35(0{,}1) + 0{,}40(0{,}2) + 0{,}25(0{,}6) = 0{,}265$.

d) La première étape consiste à calculer la fonction de masse de probabilité a posteriori de Θ. Soit $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ et $\boldsymbol{x} = (1, 0, 1, 1, 0)$. Alors, par l'indépendance conditionnelle de $S_1, \dots, S_5$,

$$\Pr[\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}|\Theta = \theta] = \prod_{j=1}^{5} \Pr[S_j = x_j|\Theta = \theta] = \theta^3 e^{-5\theta}.$$

On obtient donc $\Pr[\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}|\Theta = 0{,}1] = 0{,}000607$, $\Pr[\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}|\Theta = 0{,}2] = 0{,}002943$, $\Pr[\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}|\Theta = 0{,}6] = 0{,}010754$ et, par la loi des probabilités totales, $\Pr[\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}] = 0{,}004078$. En utilisant la règle de Bayes,

$$\Pr[\Theta = \theta|\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}] = \begin{cases} 0{,}0521, & \theta = 0{,}1 \\ 0{,}2887, & \theta = 0{,}2 \\ 0{,}6592, & \theta = 0{,}6 \end{cases}$$

et, finalement, la prime bayesienne de sixième année est $E[\Theta|\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}] = 0{,}0521(0{,}1) + 0{,}2887(0{,}2) + 0{,}6592(0{,}6) = 0{,}4585$.

3.2 Soit S_i le résultat du i^{e} lancer d'un dé, D_1 l'événement «choisir le dé régulier» et D_2 l'événement «choisir le dé irrégulier».

a) Par la loi des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \Pr[S_1 = 5] &= \Pr[S_1 = 5|D_1] \Pr[D_1] + \Pr[S_1 = 5|D_2] \Pr[D_2] \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Plus simplement, on a 3 faces numérotées 5 sur un total de 12, d'où une probabilité de $\frac{1}{4}$.

b) On cherche la valeur de la fonction de masse de probabilité de la distribution prédictive de S_2 au point $x = 5$:

$$\begin{aligned}\Pr[S_2 = 5|S_1 = 5] &= \frac{1}{\Pr[S_1 = 5]}\,(\Pr[S_1 = 5, S_2 = 5|D_1]\Pr[D_1] \\ &\quad + \Pr[S_1 = 5, S_2 = 5|D_2]\Pr[D_2]) \\ &= \frac{(\frac{1}{36})(\frac{1}{2}) + (\frac{4}{36})(\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{18}.\end{aligned}$$

3.3 Soit S le nombre de piles obtenus après n lancers d'une pièce de monnaie et Θ l'urne choisie. On identifie l'urne A par $\theta = 0{,}6$ et l'urne B par $\theta = 0{,}2$. Ainsi, $S|\Theta = \theta \sim \text{Binomiale}(n, \theta)$. On doit calculer $E[S_2|S_1 = 4]$. On obtient la distribution a posteriori de $\Theta|S_1 = 4$ avec

$$\Pr[\Theta = \theta|S_1 = 4] = \frac{\Pr[S_1 = 4|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta]}{\sum_\theta \Pr[S_1 = 4|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta]}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}\Pr[\Theta = 0{,}6|S_1 = 4] &= \frac{\binom{5}{4}(0{,}6)^4(0{,}4)(0{,}5)}{\binom{5}{4}(0{,}6)^4(0{,}4)(0{,}5) + \binom{5}{4}(0{,}2)^4(0{,}8)(0{,}5)} \\ &= \frac{0{,}1296}{0{,}1328} \\ &= 0{,}9759.\end{aligned}$$

De la même façon, on trouve $\Pr[\Theta = 0{,}2|S_1 = 4] = 0{,}0032/0{,}1328 = 0{,}02410$. Enfin,

$$\begin{aligned}E[S_2|S_1 = 4] &= E[S_2|\theta = 0{,}6]\Pr[\Theta = 0{,}6|S_1 = 4] \\ &\quad + E[S_2|\Theta = 0{,}2]\Pr[\Theta = 0{,}2|S_1 = 4] \\ &= 5(0{,}6)(0{,}9759) + 5(0{,}2)(0{,}02410) \\ &= 2{,}9518.\end{aligned}$$

3.4 Soit S une variable indiquant si un employeur a eu un sinistre dans une année et Θ une variable identifiant le groupe auquel cet employeur appartient. On identifie le groupe à fréquence faible par $\theta = 0{,}1$, le groupe à fréquence moyenne par $\theta = 0{,}2$ et le groupe à fréquence élevée par $\theta = 0{,}4$. On a donc $S|\Theta = \theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$.

a) On a

$$\begin{aligned}\Pr[S=1] &= \sum_{\theta} \Pr[S=1|\Theta=\theta]\Pr[\Theta=\theta] \\ &= (0{,}1+0{,}2+0{,}4)\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{7}{30}.\end{aligned}$$

b) En utilisant la règle de Bayes et l'hypothèse d'indépendance des sinistres,

$$\begin{aligned}\Pr[\Theta=0{,}1|S_1=0,S_2=0] &= \frac{\Pr[S_1=0,S_2=0|\Theta=0{,}1]\Pr[\Theta=0{,}1]}{\Pr[S_1=0,S_2=0]} \\ &= \frac{(0{,}9)^2(\frac{1}{3})}{(0{,}9)^2(\frac{1}{3})+(0{,}8)^2(\frac{1}{3})+(0{,}6)^2(\frac{1}{3})} \\ &= \frac{81}{181} \\ &= 0{,}4475.\end{aligned}$$

c) De la même façon qu'en b), on trouve $\Pr[\Theta=0{,}2|S_1=0,S_2=0] = 64/181 = 0{,}3536$ et $\Pr[\Theta=0{,}4|S_1=0,S_2=0] = 36/181 = 0{,}1989$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Pr[S_3=1|S_1=0,S_2=0] &= \sum_{\theta}\Pr[S_3=1|\Theta=\theta]\Pr[\Theta=\theta|S_1=0,S_2=0] \\ &= \left(\frac{1}{181}\right)[(0{,}1)(81)+(0{,}2)(64)+(0{,}4)(36)] \\ &= \frac{35{,}3}{181} \\ &= 0{,}1950.\end{aligned}$$

3.5 a) On a

$$\begin{aligned}E[\Theta] &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\,d\theta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

b) On a $S|\Theta=\theta \sim \text{Binomiale}(n,\theta)$, c'est-à-dire $\Pr[S=x|\Theta=\theta] = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$. Avec le théorème de Bayes, on trouve

$$\begin{aligned}u(\theta|x) &\propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} \\ &= \theta^{\alpha+x-1}(1-\theta)^{\beta+n-x-1},\end{aligned}$$

que l'on sait être la densité d'une bêta avec de nouveaux paramètres. Donc, $\Theta|S=x \sim \text{Bêta}(\tilde{\alpha}=\alpha+x, \tilde{\beta}=\beta+n-x)$.

c) Une pièce a été lancée 10 fois et les résultats suivants furent obtenus : P, F, F, P, F, P, F, F, P, P. En utilisant les résultats obtenus précédemment, la distribution a posteriori de Θ est une bêta et les paramètres (α, β) après chaque lancer sont les suivants, dans l'ordre : $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(5,4)$, $(6,4)$, $(6,5)$, $(6,6)$. Quelques distributions a posteriori sont présentées aux figures D.1–D.6. Une première observation est le déplacement vers la gauche ou vers la droite de la distribution selon le nombre de résultats piles et de résultats faces obtenus. Une deuxième observation est la concentration graduelle de la distribution autour de $\theta = \frac{1}{2}$, ce qui indique une pièce équilibrée.

d) Soit Y le résultat du onzième lancer, où $Y = 1$ correspond à face. On a

$$\begin{aligned}
\Pr[Y = 1] &= \int_0^1 \Pr[Y = 1 | \Theta = \theta] \Pr[\Theta = \theta] \, d\theta \\
&= \int_0^1 \theta \Pr[\Theta = \theta] \\
&= E[\Theta] \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.
\end{aligned}$$

Le résultat n'est pas nécessairement $\frac{1}{2}$ puisque l'on ignore si la pièce est équilibrée ou non.

e) On a

$$\begin{aligned}
\Pr[Y = 1 | S = x] &= \int_0^1 \Pr[Y = 1 | \Theta = \theta] \Pr[\Theta = \theta | S = x] \, d\theta \\
&= \int_0^1 \theta \Pr[\Theta = \theta | S = x] \\
&= E[\Theta | S = x] \\
&= \frac{\alpha + x}{\alpha + \beta + n}.
\end{aligned}$$

3.6 On a le modèle suivant : $X|\Theta \sim \text{Pareto}(\Theta, 10)$ et $\Theta \sim U(1,2,3)$. On note que la fonction de répartition de $X|\Theta = \theta$ est

$$F(x|\theta) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^{\theta}.$$

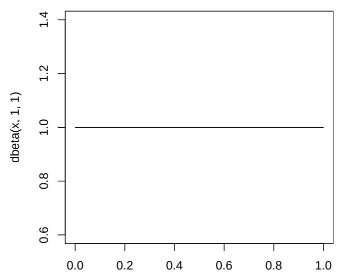

FIG. D.1 — *Distribution a priori (uniforme)*

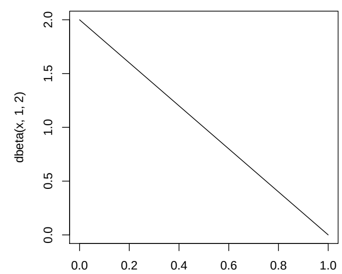

FIG. D.2 — *Distribution après un lancer (P)*

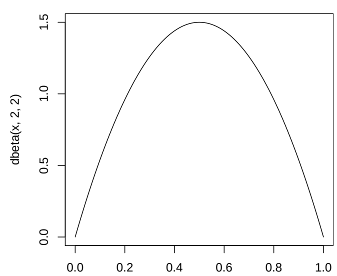

FIG. D.3 — *Distribution après deux lancers (P, F)*

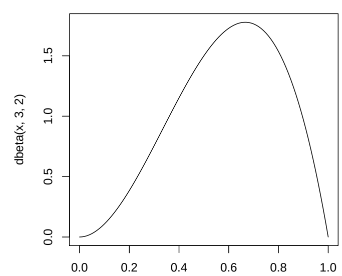

FIG. D.4 — *Distribution après trois lancers (P, F, F)*

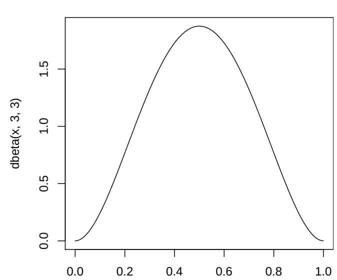

FIG. D.5 — *Distribution après quatre lancers (P, F, F, P)*

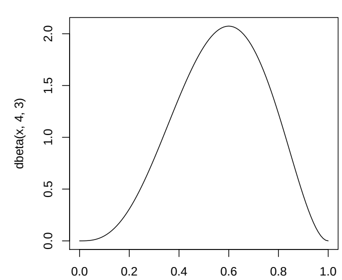

FIG. D.6 — *Distribution après cinq lancers (P, F, F, P, F)*

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Pr[X_2 > 30|X_1 = 20] &= \sum_{\theta=1}^{3} \Pr[X_2 > 30|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta|X_1 = 20] \\
&= \sum_{\theta=1}^{3} (1 - F(30|\theta)) \frac{f(20|\theta)(\frac{1}{3})}{\sum_{\theta=1}^{3} f(20|\theta)(\frac{1}{3})} \\
&= \frac{\sum_{\theta=1}^{3} \left(\frac{10}{10+30}\right)^{\theta} \frac{\theta 10^{\theta}}{(10+20)^{\theta+1}}}{\sum_{\theta=1}^{3} \frac{\theta 10^{\theta}}{(10+20)^{\theta+1}}} \\
&= 0{,}1484.
\end{aligned}$$

3.7 a) $N|\Theta = \theta \sim \text{Binomiale}(10, \theta)$ et la fonction de masse de probabilité de Θ est

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} 0{,}2, & \theta = 0{,}04 \\ 0{,}6, & \theta = 0{,}10 \\ 0{,}2, & \theta = 0{,}16. \end{cases}$$

b) En général, on a

$$\begin{aligned}
\Pr[N = n] &= \sum_{\theta} \Pr[N = n|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta] \\
&= \sum_{\theta} \binom{10}{n} \theta^n (1-\theta)^{10-n} \Pr[\Theta = \theta].
\end{aligned}$$

Ce qui donne, $\Pr[N = 0] = 0{,}377$, $\Pr[N = 1] = 0{,}354$ et $\Pr[N = 2] = 0{,}184$.

c) On réutilise la formule en b) avec $\Pr[\Theta = 0{,}10] = 1$. On trouve $\Pr[N = 0] = 0{,}349$, $\Pr[N = 1] = 0{,}387$ et $\Pr[N = 2] = 0{,}194$.

3.8 Soit $S|\Theta \sim \text{Gamma}(\tau, \Theta)$ et $\Theta^{-1} \sim \text{Bêta}(\alpha, \beta)$. Alors $E[S|\Theta] = \tau\Theta^{-1}$ et $\text{Var}[S|\Theta] = \tau\Theta^{-2}$, d'où

$$\begin{aligned}
\text{Var}[S] &= \text{Var}[E[S|\Theta]] + E[\text{Var}[S|\Theta]] \\
&= \tau^2 \text{Var}[\Theta^{-1}] + \tau E[\Theta^{-2}] \\
&= \frac{\tau^2 \alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + \frac{\tau\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}.
\end{aligned}$$

Avec $\tau = 2$, $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, $\text{Var}[S] = 11/9$.

3.9 On a

$$\begin{aligned}
\Pr[S = x|\Theta = \theta] &= \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots, \\
u(\theta) &= \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{\theta^2}\right), \quad 1 < \theta < 5.
\end{aligned}$$

a) Par la loi des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\Pr[S=2] &= \int_1^5 \Pr[S=2|\Theta=\theta]u(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{5}{4}\int_1^5 \frac{\theta^2 e^{-\theta}}{2!\,\theta^2}\,d\theta \\
&= \left(\frac{5}{8}\right)(e^{-1}-e^{-5}) \\
&= 0{,}2257.
\end{aligned}$$

b) On trouve d'abord la densité a posteriori de Θ :

$$\begin{aligned}
u(\theta|x_1=1,x_2=1) &= \frac{\Pr[S_1=1|\Theta=\theta]\Pr[S_2=1|\Theta=\theta]u(\theta)}{\int_1^5 \Pr[S_1=1|\Theta=\theta]\Pr[S_2=1|\Theta=\theta]u(\theta)} \\
&= \frac{e^{-2\theta}}{\int_1^5 e^{-2\theta}\,d\theta} \\
&= \frac{2e^{-2\theta}}{e^{-2}-e^{-10}} \\
&= 14{,}7831 e^{-2\theta}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Pr[S_3=0|S_1=1,S_2=1] &= \int_1^5 \Pr[S_3=0|\Theta=\theta]u(\theta|x_1=1,x_2=1)\,d\theta \\
&= \frac{2}{e^{-2}-e^{-10}}\int_1^5 e^{-3\theta}\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\,\frac{e^{-3}-e^{-15}}{e^{-2}-e^{-10}} \\
&= 0{,}2453.
\end{aligned}$$

c) Avant tout, il faut noter que $\mu(\Theta)=\Theta$. Puis, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
E[\Theta|S_1=1,S_2=1] &= \int_1^5 u(\theta|x_1=1,x_2=1)\,d\theta \\
&= \frac{2}{e^{-2}-e^{-10}}\int_1^5 \theta e^{-2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{2}{e^{-2}-e^{-10}}\left[-\frac{\theta}{2}e^{-2\theta}-\frac{1}{4}e^{-2\theta}\right|_1^5 \\
&= \frac{2}{e^{-2}-e^{-10}}\left(\frac{3}{4}e^{-2}-\frac{11}{4}e^{-10}\right) \\
&= 1{,}4987.
\end{aligned}$$

3.10 Dans ce problème, il faut réaliser qu'il y a une probabilité de $3/4$ de ne pas avoir de sinistre ou, de manière équivalente, un sinistre de montant 0. On définit les variables aléatoires S représentant le montant d'un sinistre dans une année et Θ identifiant la classe de risque. Par abus de notation, on considère que les valeurs possibles de Θ sont $\theta = A$, B et C. À partir des données du tableau, on peut construire la fonction de masse de probabilité de la variable aléatoire conditionnelle $S|\Theta = \theta$:

$$\Pr[X = x|\Theta = A] = \begin{cases} \frac{3}{4}, & x = 0 \\ (\frac{1}{4})(\frac{3}{5}) = \frac{3}{20}, & x = 10\,000 \\ (\frac{1}{4})(\frac{1}{5}) = \frac{1}{20}, & x = 20\,000 \\ (\frac{1}{4})(\frac{1}{5}) = \frac{1}{20}, & x = 30\,000 \end{cases}$$

$$\Pr[X = x|\Theta = B] = \begin{cases} \frac{3}{4}, & x = 0 \\ 0, & x = 10\,000 \\ (\frac{1}{4})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}, & x = 20\,000 \\ (\frac{1}{4})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}, & x = 30\,000 \end{cases}$$

$$\Pr[X = x|\Theta = A] = \begin{cases} \frac{3}{4}, & x = 0 \\ (\frac{1}{4})(\frac{1}{5}) = \frac{1}{20}, & x = 10\,000 \\ (\frac{1}{4})(\frac{1}{5}) = \frac{1}{20}, & x = 20\,000 \\ (\frac{1}{4})(\frac{3}{5}) = \frac{3}{20}, & x = 30\,000 \end{cases}$$

et $\Pr[\Theta = \theta] = 1/3$, $\theta = A, B, C$. Deux solutions possibles.

1. Avec la distribution a posteriori de Θ. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \Pr[\Theta = \theta|X_1 = 30\,000] &= \frac{\Pr[X_1 = 30\,000|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta]}{\sum_{\theta=A,B,C}\Pr[X_1 = 30\,000|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta]} \\ &= \begin{cases} \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{8}+\frac{3}{20}} = \frac{2}{13}, & \theta = A \\ \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{8}+\frac{3}{20}} = \frac{5}{13}, & \theta = B \\ \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{8}+\frac{3}{20}} = \frac{6}{13}, & \theta = C. \end{cases} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= E[X|\Theta = A] = 4\,000 \\ \mu(B) &= E[X|\Theta = B] = 6\,250 \\ \mu(C) &= E[X|\Theta = C] = 6\,000, \end{aligned}$$

d'où la prime bayesienne pour la deuxième année est

$$\begin{aligned} E[\mu(\Theta)|X_1 = 30\,000] &= 4\,000\left(\frac{2}{13}\right) + 6\,250\left(\frac{5}{13}\right) + 6\,000\left(\frac{6}{13}\right) \\ &= 5\,788{,}46. \end{aligned}$$

2. Avec la distribution prédictive. On a

$$\begin{aligned}
\Pr[X_2 = x|X_1 = 30\ 000] &= \frac{\Pr[X_2 = x, X_1 = 30\ 000]}{\Pr[X_1 = 30\ 000]} \\
&= \frac{\sum_{\theta=A,B,C} \Pr[X_2 = x|\Theta = \theta] \Pr[X_1 = 30\ 000|\Theta = \theta] \Pr[\Theta = \theta]}{\sum_{\theta=A,B,C} \Pr[X_1 = 30\ 000|\Theta = \theta] \Pr[\Theta = \theta]} \\
&= \begin{cases} \frac{3}{4}, & x = 0 \\ \dfrac{(\frac{3}{4})(\frac{1}{20}) + (\frac{3}{4})(\frac{1}{8}) + (\frac{3}{4})(\frac{3}{20})}{\frac{1}{20} + \frac{1}{8} + \frac{3}{20}}, & x = 10\ 000 \\ \dfrac{(\frac{3}{20})(\frac{1}{20}) + (0)(\frac{1}{8}) + (\frac{1}{20})(\frac{3}{20})}{\frac{1}{20} + \frac{1}{8} + \frac{3}{20}}, & x = 20\ 000 \\ \dfrac{(\frac{1}{20})^2 + (\frac{1}{8})^2 + (\frac{3}{20})^2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{8} + \frac{3}{20}}, & x = 30\ 000 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{3}{4}, & x = 0 \\ \frac{6}{130}, & x = 10\ 000 \\ \frac{41}{520}, & x = 20\ 000 \\ \frac{65}{520}, & x = 30\ 000, \end{cases}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
E[X_2|X_1 = 30\ 000] &= 10\ 000 \left(\frac{6}{130}\right) + 20\ 000 \left(\frac{41}{520}\right) + 30\ 000 \left(\frac{65}{520}\right) \\
&= 5\ 788{,}46.
\end{aligned}$$

3.11 La sévérité des sinistres ne joue aucun rôle dans ce problème. On pose $S|\Theta = \theta \sim \text{Poisson}(\theta)$ et $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$. On sait que $E[\Theta] = \alpha/\lambda = 2$ et $\text{Var}[\Theta] = \alpha/\lambda^2 = 2$, d'où $\alpha = 2$ et $\lambda = 1$.

a) On charge la prime collective à un nouvel assuré. Or,

$$\begin{aligned}
E[S] &= E[E[S|\Theta]] \\
&= E[\Theta] \\
&= 2.
\end{aligned}$$

b) On cherche $E[\mu(\Theta)|S_1 + S_2 + S_3 = 8]$. Or,

$$\begin{aligned}
u(\theta|x_1, x_2, x_3) &\propto \prod_{t=1}^{3} f(x_t|\theta) u(\theta) \\
&\propto \prod_{t=1}^{3} \theta^{x_t} e^{-\theta} \theta^{2-1} e^{-\theta} \\
&= \theta^{\sum_{t=1}^{3} x_t + 2 - 1} e^{-4\theta},
\end{aligned}$$

d'où $\Theta|S_1 = x_1, S_2 = x_2, S_3 = x_3 \sim \text{Gamma}(\sum_{t=1}^{3} x_t + 2, 4)$. (On remarquera donc que seul le nombre total de sinistres dans les trois premières années est important, pas les fréquences annuelles.) Enfin, $E[\mu(\Theta)|S_1 + S_2 + S_3 = 8] = E[\Theta|S_1 + S_2 + S_3 = 8] = 10/4 = 2{,}5$.

3.12 On a $N|\Theta = \theta \sim \text{Binomiale}(2, \theta)$ et

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} 0{,}25, & \theta = 1/4 \\ 0{,}25, & \theta = 1/2 \\ 0{,}50, & \theta = 1/8. \end{cases}$$

a) On a

$$\begin{aligned}
\Pr[\Theta = \theta|N_1 = 0, N_2 = 2] &= \frac{\Pr[N_1 = 0, N_2 = 2|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta]}{\sum_\theta \Pr[N_1 = 0, N_2 = 2|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta]} \\
&= \frac{\theta^2(1-\theta)^2 \Pr[\Theta = \theta]}{\sum_\theta \theta^2(1-\theta)^2 \Pr[\Theta = \theta]} \\
&= \begin{cases} \frac{0{,}008789}{0{,}030396}, & \theta = 1/4 \\ \frac{0{,}015625}{0{,}030396}, & \theta = 1/2 \\ \frac{0{,}005981}{0{,}030396}, & \theta = 1/8 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0{,}2891, & \theta = 1/4 \\ 0{,}5141, & \theta = 1/2 \\ 0{,}1968, & \theta = 1/8. \end{cases}
\end{aligned}$$

b) On doit calculer $E[N_3|N_1 = 0, N_2 = 2]$. On peut procéder de deux façons. Tout d'abord, en trouvant d'abord la distribution prédictive :

$$\begin{aligned}
&\Pr[N_3 = n|N_1 = 0, N_2 = 2] \\
&\qquad = \sum_\theta \Pr[N_3 = n|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta|N_1 = 0, N_2 = 2] \\
&\qquad = \begin{cases} 0{,}4418, & n = 0 \\ 0{,}4085, & n = 1 \\ 0{,}1497, & n = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E[N_3|N_1 = 0, N_2 = 2] &= 0{,}4085 + 2(0{,}1497) \\
&= 0{,}7078.
\end{aligned}$$

L'autre méthode, plus rapide, consiste à calculer la prime bayesienne à partir de la prime de risque :

$$\begin{aligned}
E[N_3|N_1 = 0, N_2 = 2] &= E[\mu(\Theta)|N_1 = 0, N_2 = 2] \\
&= E[2\Theta|N_1 = 0, N_2 = 2] \\
&= 2E[\Theta|N_1 = 0, N_2 = 2] \\
&= 2\left[\frac{1}{4}(0{,}2891) + \frac{1}{2}(0{,}5141) + \frac{1}{8}(0{,}1968)\right] \\
&= 0{,}7078.
\end{aligned}$$

3.13 Soit S le résultat du tir aléatoire et Θ le résultat du dé. On a $S|\Theta = \theta \sim U(0, 100\theta)$ et $\Pr[\Theta = \theta] = 1/6$.

a) On trouve d'abord la densité a posteriori de Θ :

$$\begin{aligned}
\Pr[\Theta = \theta|S_1 = 80, S_2 = 340) &= \frac{f(80|\theta)f(340|\theta)\Pr[\Theta = \theta]}{\sum_{\theta=1}^{6} f(80|\theta)f(340|\theta)\Pr[\Theta = \theta]} \\
&= \begin{cases}
\frac{(\frac{1}{100})(0)}{(\frac{1}{400})^2+(\frac{1}{500})^2+(\frac{1}{600})^2}, & \theta = 1 \\
\frac{(\frac{1}{200})(0)}{(\frac{1}{400})^2+(\frac{1}{500})^2+(\frac{1}{600})^2}, & \theta = 2 \\
\frac{(\frac{1}{300})(0)}{(\frac{1}{400})^2+(\frac{1}{500})^2+(\frac{1}{600})^2}, & \theta = 3 \\
\frac{(\frac{1}{400})(\frac{1}{400})}{(\frac{1}{400})^2+(\frac{1}{500})^2+(\frac{1}{600})^2}, & \theta = 4 \\
\frac{(\frac{1}{500})(\frac{1}{500})}{(\frac{1}{400})^2+(\frac{1}{500})^2+(\frac{1}{600})^2}, & \theta = 5 \\
\frac{(\frac{1}{600})(\frac{1}{600})}{(\frac{1}{400})^2+(\frac{1}{500})^2+(\frac{1}{600})^2}, & \theta = 6
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
0, & \theta = 1 \\
0, & \theta = 2 \\
0, & \theta = 3 \\
0{,}4798, & \theta = 4 \\
0{,}3070, & \theta = 5 \\
0{,}2132, & \theta = 6.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\mu(\theta) = E[S|\Theta = \theta] = 50\theta$, la prime bayesienne est

$$\begin{aligned}
E[\mu(\Theta)|S_1 = 80, S_2 = 340] &= 50[(4)(0{,}4798) + (5)(0{,}3070) + (6)(0{,}2132)] \\
&= 236{,}67.
\end{aligned}$$

b) Il faudrait que

$$\begin{aligned}
236{,}65 &= z\bar{S} + (1 - z)E[\mu(\Theta)] \\
&= z210 + (1 - z)(50)(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)\left(\frac{1}{6}\right) \\
&= 175 - 35z,
\end{aligned}$$

soit $z = 1{,}76$. Comme z ne peut être plus grand que 1 par définition, il est impossible d'écrire la prime bayesienne sous la forme d'une prime de crédibilité.

3.14 Par le théorème de Bayes,

$$\begin{aligned}
u(\theta|S_1 = 1, S_2 = 1) &= \frac{\prod_{t=1}^{2} f(x_t|\Theta = \theta)u(\theta)}{\int_0^{10} \prod_{t=1}^{2} f(x_t|\Theta = \theta)u(\theta)\,d\theta} \\
&= \frac{\frac{\theta}{50}\prod_{t=1}^{2} \theta^2 x_t e^{-\theta x_t}}{\int_0^{10} \frac{\theta}{50}\prod_{t=1}^{2} \theta^2 x_t e^{-\theta x_t}\,d\theta} \\
&= \frac{\theta^5 e^{-2\theta}}{\int_0^{10} \theta^5 e^{-2\theta}\,d\theta},
\end{aligned}$$

pour $0 < \theta < 10$. Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} \theta^5 e^{-2\theta}\,d\theta &= \frac{\Gamma(6)}{2^6} \int_0^{10} \frac{2^6}{\Gamma(6)} \theta^{6-1} e^{-2\theta}\,d\theta \\
&= 1{,}875 G(10; 6, 2),
\end{aligned}$$

où $G(x; \alpha, \lambda)$ est la fonction de répartition d'une loi Gamma(α, λ). On peut trouver la valeur de $G(10; 6, 2)$ dans Excel ou dans R avec

```
> pgamma(10, 6, 2)

[1] 0.999928
```

Par conséquent, la distribution a posteriori de Θ est

$$u(\theta|S_1 = 1, S_2 = 1) = \begin{cases} \dfrac{\theta^5 e^{-2\theta}}{1{,}8737}, & 0 < \theta < 10 \\ 0, \text{ailleurs.} \end{cases}$$

3.15 a) Le modèle est le suivant : $N|\Theta \sim$ Poisson(Θ) et

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} 0{,}5, & \theta = 2 \\ 0{,}5, & \theta = 4. \end{cases}$$

b) On doit d'abord trouver la distribution a posteriori de Θ en utilisant

$$\begin{aligned}
\Pr[N_1 = 4, N_2 = 4|\Theta = 2] &= \left(\frac{2^4 e^{-2}}{4!}\right)^2 = 0{,}008140 \\
\Pr[N_1 = 4, N_2 = 4|\Theta = 4] &= \left(\frac{4^4 e^{-4}}{4!}\right)^2 = 0{,}038168,
\end{aligned}$$

d'où $\Pr[N_1 = 4, N_2 = 4] = 0{,}008140(0{,}5) + 0{,}038168(0{,}5) = 0{,}023154$. Alors

$$\Pr[\Theta = \theta | N_1 = 4, N_2 = 4] = \begin{cases} \frac{0{,}008140(0{,}5)}{0{,}023154} = 0{,}175779, & \theta = 2 \\ \frac{0{,}038168(0{,}5)}{0{,}023154} = 0{,}824221, & \theta = 4. \end{cases}$$

Ainsi, puisque $\mu(\Theta) = \Theta$, la prime bayesienne pour la troisième année est $E[\Theta | N_1 = 4, N_2 = 4] = 2(0{,}175779) + 4(0{,}824221) = 3{,}6484$.

3.16 Soit θ_1 représentant les bons risques, θ_2 les moyens risques et θ_3 les mauvais risques. On a donc le modèle suivant :

$$\begin{aligned} S|\Theta = \theta_1 &\sim \text{Gamma}(4, 2) \Leftrightarrow f(x|\theta_1) = \frac{8}{3} x^3 e^{-2x} \\ S|\Theta = \theta_2 &\sim \text{Gamma}(4, 1) \Leftrightarrow f(x|\theta_2) = \frac{1}{6} x^3 e^{-x} \\ S|\Theta = \theta_3 &\sim \text{Gamma}(10, 2) \Leftrightarrow f(x|\theta_3) = \frac{8}{2\,835} x^9 e^{-2x} \end{aligned}$$

et

$$\Pr[\Theta = \theta_i] = \begin{cases} 0{,}25, & i = 1 \\ 0{,}60, & i = 2 \\ 0{,}15, & i = 3. \end{cases}$$

De plus $\mu(\theta_1) = 2$, $\mu(\theta_2) = 4$ et $\mu(\theta_3) = 5$. Le calcul de la prime bayesienne requiert la distribution a posteriori de Θ :

$$\begin{aligned} \Pr[\Theta = \theta_i | S_1 = 1, S_2 = 2] &= \frac{f(1|\theta_i) f(2|\theta_i) \Pr[\Theta = \theta_i]}{\sum_{j=1}^3 f(1|\theta_j) f(2|\theta_j) \Pr[\Theta = \theta_j]} \\ &= \begin{cases} 0{,}841507, & i = 1 \\ 0{,}158457, & i = 2 \\ 0{,}000036, & i = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, la prime bayesienne pour la troisième année est $E[\mu(\Theta) | S_1 = 1, S_2 = 2] = 2(0{,}841507) + 4(0{,}158457) + 5(0{,}000036) = 2{,}3170$.

3.17 a) Soit Θ représentant le niveau de risque d'un contrat, avec $\theta = 1$ identifiant un risque de classe A et $\theta = 3$ identifiant un risque de classe B. Comme chaque classe contient le même nombre de risques, la probabilité qu'un risque choisi au hasard provienne d'une classe est de 50 % :

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \theta = 1 \\ \frac{1}{2}, & \theta = 3. \end{cases}$$

Si N est le nombre de sinistres pendant un an pour un contrat et X est le montant d'un sinistre pour ce même contrat, on a le modèle suivant :

$$\begin{aligned}N|\Theta &\sim \text{Poisson}(\Theta)\\ X|\Theta &\sim \text{Exponentielle}(1/\Theta).\end{aligned}$$

En effet, il est précisé dans l'énoncé que l'espérance de la loi exponentielle dans chaque groupe est égale à celle de la loi de Poisson.

b) Pour simplifier la notation, on prend A pour représenter l'événement $\{N_1 = 2, X_1 = 1, X_2 = 3\}$. On veut

$$E[S|A] = \sum_{\theta=1,3} E[S|\Theta = \theta] \Pr[\Theta = \theta|A].$$

Premièrement, comme la fréquence et la sévérité sont indépendantes sachant Θ à l'intérieur de chaque classe, on a

$$E[S|\Theta] = E[N|\Theta]E[X|\Theta] = \Theta^2.$$

Puis, en utilisant la règle de Bayes,

$$\begin{aligned}\Pr[\Theta = \theta|A] &= \frac{\Pr[A|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta]}{\sum_{\theta=1,3}\Pr[A|\Theta = \theta]\Pr[\Theta = \theta]}\\ &= \frac{(\theta^2 e^{-\theta})(\frac{1}{\theta}e^{-1/\theta})(\frac{1}{\theta}e^{-3/\theta})(\frac{1}{2})}{\sum_{\theta=1,3}(\theta^2 e^{-\theta})(\frac{1}{\theta}e^{-1/\theta})(\frac{1}{\theta}e^{-3/\theta})(\frac{1}{2})}\\ &= \frac{e^{-(\theta^2+4)/\theta}}{\sum_{\theta=1,3} e^{-(\theta^2+4)/\theta}}\\ &= \begin{cases}0{,}3392, & \theta = 1\\ 0{,}6608, & \theta = 3,\end{cases}\end{aligned}$$

d'où

$$E[S|A] = (1)^2(0{,}3392) + (3)^2(0{,}6608) = 6{,}286.$$

3.18 On a $S|\Theta \sim$ Géométrique(Θ) et $\Theta \sim$ Bêta(α, β).

a) $\mu(\Theta) = E[S|\Theta] = \sum_{x=0}^{\infty} x\theta(1-\theta)^x = (1-\theta)/\theta$. (Ce résultat est aisément obtenu en dérivant $\sum_{x=0}^{\infty}\theta(1-\theta)^x = 1$.)

b) La prime collective est

$$\begin{aligned}m = E[\mu(\Theta)] &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \theta^{\alpha-2}(1-\theta)^{\beta}\,d\theta\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\beta}{\alpha-1}.\end{aligned}$$

c) Soit $\boldsymbol{S} = (S_1, \dots, S_n)$ et $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Premièrement, $\Pr[\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}|\Theta = \theta] = \prod_{t=1}^{n} \Pr[S_t = x_t|\Theta = \theta] = \theta^n (1-\theta)^{\sum x_t}$. Ensuite,

$$\begin{aligned} u(\theta|\boldsymbol{x}) &\propto \theta^n (1-\theta)^{\sum x_t} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \\ &= \theta^{\alpha+n-1} (1-\theta)^{\beta+\sum x_t - 1}, \end{aligned}$$

d'où $\Theta|\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x} \sim \text{Bêta}(\tilde{\alpha} = \alpha + n, \tilde{\beta} = \beta + \sum x_t)$.

d) Comme la densité a posteriori de Θ est du même type que sa densité a priori, on peut calculer en premier la densité marginale de S. La distribution prédictive sera du même type, mais avec des paramètres modifiés. Or,

$$\begin{aligned} \Pr[S = x] &= \int_0^1 \Pr[S = x|\Theta = \theta] u(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \theta^{\alpha} (1-\theta)^{\beta+x-1}\, d\theta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+x)}{\Gamma(\alpha+\beta+x+1)} \end{aligned}$$

et donc

$$\Pr[S_{n+1} = x|\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}] = \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\beta})} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\beta}+x)}{\Gamma(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+x+1)},$$

avec $\tilde{\alpha} = \alpha + n$ et $\tilde{\beta} = \beta + \sum x_t$.

e) On utilise le résultat en c) car trouver l'espérance de la distribution prédictive trouvée en d) peut être quelque peu compliqué. Des résultats de b) et c),

$$E[\mu(\Theta)|\boldsymbol{S}] = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha} - 1} = \frac{\beta + \sum_{t=1}^{n} S_t}{\alpha + n - 1}.$$

f) $E[\mu(\Theta)|\boldsymbol{S}] = z\bar{S} + (1-z)m$ avec $z = n/(n + \alpha - 1)$.

3.19 On a $S|\Theta \sim \text{Binomiale}(\nu, \Theta)$ et $\Theta \sim \text{Bêta}(\alpha, \beta)$.

a) La prime de risque est $\mu(\Theta) = E[S|\Theta] = \nu\Theta$.

b) La prime collective est $E[\mu(\Theta)] = \nu E[\Theta] = \nu\alpha/(\alpha+\beta)$.

c) On a

$$\begin{aligned} u(\theta|x_1, \dots, x_n) &\propto u(\theta) \prod_{t=1}^{n} \Pr[S = x_t|\Theta = \theta] \\ &\propto \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \prod_{t=1}^{n} \theta^{x_t} (1-\theta)^{\nu - x_t} \\ &= \theta^{\alpha + \sum x_t - 1} (1-\theta)^{\beta + n\nu + \sum x_t - 1}. \end{aligned}$$

La distribution a posteriori de Θ sachant l'expérience $S_1, \dots, S_n$ est une bêta avec paramètres $\tilde{\alpha} = \alpha + \sum_{t=1}^{n} S_t$ et $\tilde{\beta} = \beta + n\nu - \sum_{t=1}^{n} S_t$.

d) Comme la distribution a posteriori est de même famille que la distribution a priori, la prime bayesienne est de la même forme que la prime collective, mais avec des paramètres modifiés :

$$\begin{aligned}
E[\mu(\Theta)|S_1,\dots,S_n] &= \frac{\nu\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} \\
&= \frac{\nu(\alpha+\sum_{t=1}^{n} S_t)}{n\nu+\alpha+\beta} \\
&= \left(\frac{n\nu}{n\nu+\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} S_t}{n}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\alpha+\beta}{n\nu+\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\nu\alpha}{\alpha+\beta}\right) \\
&= z\bar{S} + (1-z)E[\mu(\Theta)]
\end{aligned}$$

où

$$z = \frac{n}{n+(\alpha+\beta)/\nu}.$$

Cette combinaison de distributions est une généralisation du cas Bernoulli/Bêta.

3.20 On a $S|\Theta \sim \text{Gamma}(\tau,\Theta)$ et $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha,\lambda)$.

a) La densité marginale de S est calculée comme suit :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^\infty f(x|\theta)\,u(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{\lambda^\alpha x^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^\tau e^{-\theta x}\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta}\,d\theta \\
&= \frac{\lambda^\alpha x^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\tau)}{(x+\lambda)^{\alpha+\tau}},
\end{aligned}$$

laquelle est une densité de Pareto généralisée avec paramètres α, λ et τ.

b) La prime de risque est $\mu(\Theta) = E[S|\Theta] = \tau/\Theta$.

c) De la distribution marginale de S, on a $m = E[S] = \tau\lambda/(\alpha-1)$ (annexe B.2.6). De la prime de risque, $m = \tau E[1/\Theta] = \tau\lambda/(\alpha-1)$. Les deux approches sont équivalentes.

d) La densité de la distribution a posteriori de Θ est

$$\begin{aligned}
u(\theta|x_1,\dots,x_n) &\propto u(\theta)\prod_{t=1}^{n} f(x_t|\theta) \\
&\propto \theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta}\prod_{t=1}^{n}\theta^\tau e^{-\theta x_t} \\
&= \theta^{\alpha+n\tau-1}e^{-(\lambda+\sum x_t)\theta},
\end{aligned}$$

d'où la distribution a posteriori de Θ est une gamma avec paramètres $\tilde{\alpha} = \alpha + n\tau$ et $\tilde{\lambda} = \lambda + \sum_{t=1}^{n} x_t$. La distribution a priori de Θ est la conjuguée naturelle de la fonction de vraisemblance $f(x|\theta)$.

e) La distribution prédictive est une Pareto généralisée avec paramètres $\tilde{\alpha} = \alpha + n\tau$, $\tilde{\lambda} = \lambda + \sum_{t=1}^{n} x_t$ et τ.

f) En utilisant la distribution a posteriori ou la distribution prédictive, la prime bayesienne pour l'année $n+1$ est simplement la prime collective avec les paramètres modifiés. Donc,

$$\begin{aligned} E[\mu(\Theta)|S_1,\dots,S_n] &= \tau\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}-1}\right) \\ &= \tau\left(\frac{\lambda + \sum_{t=1}^{n} S_t}{\alpha + n\tau - 1}\right). \end{aligned}$$

g) La prime bayesienne ci-dessus peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} E[\mu(\Theta)|S_1,\dots,S_n] &= \left(\frac{n\tau}{n\tau+\alpha-1}\right)\sum_{t=1}^{n}\frac{S_t}{n} + \left(\frac{\alpha-1}{n\tau+\alpha-1}\right)\left(\frac{\tau\lambda}{\alpha-1}\right) \\ &= z\bar{S} + (1-z)m \end{aligned}$$

avec

$$z = \frac{n}{n + (\alpha-1)/\tau}.$$

3.21 Dans le cas exponentielle/gamma, la prime bayesienne est

$$B_{n+1} = \frac{\lambda + \sum_{t=1}^{n} x_t}{\alpha + n - 1}.$$

Ici $\alpha = 7$ et $\lambda = 42$. Si $B_5 = 9$, alors $42 + \sum_{t=1}^{4} x_t = 9(7+4-1) = 90$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} B_6 &= \frac{42 + \sum_{t=1}^{4} x_t + x_5}{7+5-1} \\ &= \frac{90 + x_5}{11} \\ &= 8{,}5, \end{aligned}$$

d'où $x_5 = 3{,}5$.

3.22 Dans le modèle Poisson/gamma, $z = n/(n+\lambda)$. Si $z = 0{,}8$ quand $n = 4$, alors $\lambda = 1$. Pour doubler la variance d'une distribution gamma sans changer son espérance, il faut diminuer de moitié chacun des paramètres. Le nouveau paramètre λ est donc $1/2$. On cherche la nouvelle valeur de n telle que $n/(n+1/2) = 0{,}8$, d'où $n = 2$.

3.23 Dans le modèle Poisson/gamma, on sait que la distribution prédictive est une binomiale négative avec paramètres $r = \alpha + \sum_{t=1}^{n} x_t$ et $\theta = (\lambda + n)/(\lambda + n + 1)$. Ici, on peut identifier $r = 7$, $\theta = 0{,}9$ et on a $n = 2$ et $x_1 + x_2 = 3$. Par conséquent, $\alpha = 4$, $\lambda = 7$ et l'espérance de la distribution a priori — une gamma — est $4/7$.

3.24 On a un modèle exponentielle/gamma. Selon le tableau de l'annexe A, la distribution marginale de S dans un tel cas est une Pareto(α, λ) et la distribution de $\Theta | S_1 = x_1, \dots, S_n = x_n$ une Gamma$(\alpha + n, \lambda + \sum_{t=1}^{n} x_t)$. Par conséquent, la distribution de $S | S_1 = x_1, \dots, S_n = x_n$ est une Pareto$(\alpha + n, \lambda + \sum_{t=1}^{n} x_t)$ et

$$\begin{aligned}
\Pr(S_4 \leq 5 | S_1 = 2, S_2 = 3, S_3 = 7) &= 1 - \left(\frac{8 + 12}{8 + 12 + 5} \right)^{2+3} \\
&= 0{,}6723.
\end{aligned}$$

3.25 On sait que dans le cas Poisson/gamma, $z = n/(n + \lambda)$. Ici, $n = 5$, et $\bar{S} = (3 + 1 + 5 + 4 + 2)/5 = 3$. De plus, la prime collective, m, est égale à 2 dans tous les cas ci-dessous.

a) Ici, $z = 0{,}5$ et donc $\pi_6 = 2{,}5$.

b) Ici, $z = 1/6$ et donc $\pi_6 = 2{,}17$.

c) Ici, $z = 0{,}9524$ et donc $\pi_6 = 2{,}9524$.

Plus le paramètre λ de la distribution gamma est petit, moins certaine est la valeur du paramètre de risque θ. Par conséquent, on accorde plus d'importance à l'expérience individuelle en augmentant le facteur de crédibilité.

3.26 La distribution marginale donnée est une Pareto$(1{,}5, 100)$. Or, on sait que la Pareto est la distribution marginale dans le mélange Exponentielle/gamma et que, dans ce cas, la distribution prédictive sera une Pareto$(1{,}5 + n, 100 + \sum_{t=1}^{n} S_t)$. Par conséquent,

$$E[S_6 | S_1 = S_2 = \cdots = S_5 = 0] = \frac{100}{1{,}5 + 5 - 1} = \frac{200}{11}.$$

3.27 Il est utile de remarquer ici que $X | \Theta \sim$ Binomiale négative$(5, \Theta)$ et $\Theta \sim$ Bêta$(6, 4)$. Par conséquent, $\mu(\Theta) = r(1 - \Theta)/\Theta = 5(1 - \Theta)/\Theta$ et

$$\begin{aligned}
u(\theta | x_1 = 7, x_2 = 13, x_3 = 1, x_4 = 4) &\propto \theta^5 (1 - \theta)^3 \prod_{t=1}^{4} \theta^5 (1 - \theta)^{x_t} \\
&= \theta^{25} (1 - \theta)^{3 + \sum x_t} \\
&= \theta^{25} (1 - \theta)^{28},
\end{aligned}$$

d'où $\Theta|X_1 = 7, X_2 = 13, X_3 = 1, X_4 = 4 \sim$ Bêta$(26, 29)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
E[\mu(\Theta)|X_1 = 7, X_2 = 13, X_3 = 1, X_4 = 4] &= 5\,\frac{\Gamma(55)}{\Gamma(26)\Gamma(29)} \int_0^1 \theta^{24}(1-\theta)^{29}\,d\theta \\
&= 5\left(\frac{\Gamma(55)}{\Gamma(26)\Gamma(29)}\right)\left(\frac{\Gamma(25)\Gamma(30)}{\Gamma(55)}\right) \\
&= \frac{29}{5} \\
&= 5{,}8.
\end{aligned}$$

3.28 On a le modèle suivant :

$$\begin{aligned}
S|\Theta = \theta &\sim \text{Poisson}(\theta) \\
\Theta &\sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)
\end{aligned}$$

La covariance entre S_1 et S_2 est

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(S_1, S_2) &= E[\text{Cov}(S_1, S_2|\Theta)] + \text{Cov}(E[S_1|\Theta], E[S_2|\Theta]) \\
&= \text{Var}[\mu(\Theta)] \\
&= \text{Var}[\Theta] \\
&= \frac{\alpha}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Or, on sait que dans le modèle Poisson/gamma, la distribution prédictive est une binomiale négative de paramètres $r = \alpha + \sum x_j$ et $p = (\lambda + n)/(\lambda + n + 1)$. On a donc $7 = \alpha + 3$ d'où $\alpha = 4$ et $0{,}9 = (\lambda + 2)/(\lambda + 3)$ d'où $\lambda = 7$. Par conséquent, $\text{Cov}(S_1, S_2) = \frac{4}{49}$.

3.29 a) On doit démontrer que la densité a posteriori $u(\theta|x_1, \dots, x_n)$ est de la même famille que la densité a priori $u(\theta)$. De manière usuelle,

$$\begin{aligned}
u(\theta|x_1, \dots, x_n) &\propto u(\theta) \prod_{t=1}^{n} f(x_t|\theta) \\
&\propto q(\theta)^{-t_0} e^{-\theta x_0} \prod_{t=1}^{n} \frac{e^{-\theta x_t}}{q(\theta)} \\
&= q(\theta)^{-t_0 - n} e^{-\theta(x_0 + \sum x_t)}
\end{aligned}$$

qui est, en effet, de la même famille que $u(\theta)$ avec paramètres modifiés $\tilde{t}_0 = t_0 + n$ et $\tilde{x}_0 = x_0 + \sum_{t=1}^{n} x_t$.

b) Premièrement, on note que $q(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-\theta x}\,dx$ pour faire de $f(x|\theta)$

une densité. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\mu(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|\theta)\,dx \\
&= \frac{1}{q(\theta)} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) e^{-\theta x}\,dx \\
&= \frac{1}{q(\theta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\theta}(-p(x)e^{-\theta x})\,dx \\
&= -\frac{1}{q(\theta)} \frac{d}{d\theta} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-\theta x}\,dx \\
&= -\frac{q'(\theta)}{q(\theta)} = -\frac{d}{d\theta} \ln q(\theta).
\end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} u(\theta) &= \frac{1}{d(x_0, t_0)} \frac{d}{d\theta} q(\theta)^{-t_0} e^{-\theta x_0} \\
&= \frac{1}{d(x_0, t_0)} \left[-t_0 q(\theta)^{-t_0 - 1} q'(\theta) e^{-\theta x_0} - x_0 q(\theta)^{-t_0} e^{-\theta x_0} \right] \\
&= \left[t_0 \left(-\frac{q'(\theta)}{q(\theta)} \right) - x_0 \right] \frac{q(\theta)^{-t_0} e^{-\theta x_0}}{d(x_0, t_0)} \\
&= (t_0 \mu(\theta) - x_0) u(\theta).
\end{aligned}$$

d) Supposons, sans perte de généralité, que le domaine de définition de la densité obtenue en c) est $(-\infty, \infty)$. En supposant que $u(-\infty) = u(\infty) = 0$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\theta} u(\theta)\,d\theta = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\theta} u(\theta)\,d\theta &= t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\theta) u(\theta)\,d\theta - x_0 \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta) \\
&= t_0 E[\mu(\Theta)] - x_0,
\end{aligned}$$

d'où $E[\mu(\Theta)] = x_0/t_0$.

e) On sait que la prime bayesienne est de la même forme que la prime collective, mais avec des paramètres modifiés. On a donc

$$\begin{aligned}
E[\mu(\Theta)|X_1, \dots, X_n] &= \frac{\tilde{x}_0}{\tilde{t}_0} \\
&= \frac{x_0 + \sum_{t=1}^{n} X_t}{t_0 + n} \\
&= \left(\frac{n}{n + t_0} \right) \bar{X} + \left(\frac{t_0}{n + t_0} \right) \left(\frac{x_0}{t_0} \right),
\end{aligned}$$

qui est une prime de crédibilité.

3.30 On a

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0$$

et

$$u(\theta) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta}, \quad \theta > 0.$$

La distribution a posteriori de Θ est

$$\begin{aligned} u(\theta|x_1, \dots, x_n) &\propto \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta} \prod_{t=1}^{n} \theta^{-1} e^{\theta^{-1} x_t} \\ &= \theta^{\alpha-n-1} e^{-\lambda\theta + \theta^{-1} \sum x_t}, \end{aligned}$$

qui n'est clairement pas une gamma. Donc, la gamma n'est pas la conjuguée naturelle de l'exponentielle avec moyenne Θ. (La gamma inverse l'est, par contre.)

3.31 Voir l'exercice 3.20.

3.32 a) On a

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= \exp\left\{ \ln\left(\binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \right) \right\} \\ &= \exp\left\{ x \ln(\theta) + (n-x) \ln(1-\theta) + \ln\binom{n}{x} \right\} \\ &= \exp\left\{ x(\ln(\theta) - \ln(1-\theta)) + \ln\binom{n}{x} + n \ln(1-\theta) \right\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} A(x) &= x \\ B(x) &= \ln\binom{n}{x} \\ q(\theta) &= n \ln(1-\theta). \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \frac{\Gamma(\theta+\beta)}{\Gamma(\theta)\Gamma(\beta)} x^{\theta-1} (1-x)^{(\beta-1)} \\ &= \exp\left\{ \ln\left(\frac{\Gamma(\theta+\beta)}{\Gamma(\theta)\Gamma(\beta)} x^{\theta-1} (1-x)^{\beta-1} \right) \right\} \\ &= \exp\left\{ (\theta-1)\ln(x) + (\beta-1)\ln(1-x) + \ln\left(\frac{\Gamma(\theta+\beta)}{\Gamma(\theta)\Gamma(\beta)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
A(x) &= \ln(x) \\
B(x) &= (\beta - 1)\ln(1 - x) \\
q(\theta) &= \ln\Gamma(\theta + \beta) - \ln\Gamma(\theta) - \ln\Gamma(\beta).
\end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned}
f(x;\theta) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2} \\
&= \exp\left\{\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) + -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{x\theta}{\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \left(\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right)\right\},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
A(x) &= x \\
B(x) &= -\frac{x^2}{2\sigma^2} \\
q(\theta) &= -\ln\sqrt{2\pi}\,\sigma - \frac{\theta^2}{2\sigma^2}.
\end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned}
f(x;\theta) &= \frac{\lambda^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\lambda x} \\
&= e^{(\theta-1)\ln x - \lambda x + \theta\ln\lambda - \ln\Gamma(\theta)},
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
A(x) &= \ln(x) \\
B(x) &= -\lambda x \\
q(\theta) &= \theta\ln\lambda - \ln\Gamma(\theta).
\end{aligned}$$

e) On a

$$\begin{aligned}
f(x;\theta) &= \theta e^{-\theta x} \\
&= e^{-\theta x + \ln\theta},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
A(x) &= x \\
B(x) &= 0 \\
q(\theta) &= \ln\theta.
\end{aligned}$$

3.33 Afin d'exprimer la fonction de vraisemblance sous la forme $a(x)e^{\theta x_j}/c(\theta)$, on utilise la paramétrisation

$$f(x|\theta) = (1-e^{-\theta})e^{\theta x},$$

d'où $a(x) = 1$ et $c(\theta) = (1-e^{-\theta})^{-1}$. On a donc que

$$\Lambda = 1 - e^{-\Theta} \sim \text{Bêta}(\alpha, \beta).$$

Soit $u(\cdot)$ la fonction de densité de probabilité de Θ et $w(\cdot)$ celle de Λ. On a

$$\begin{aligned} u(\theta) &= w(1-e^{-\theta})\left|\frac{d}{d\theta}(1-e^{-\theta})\right| \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-e^{-\theta})^{\alpha-1}(e^{-\theta})^{\beta} \\ &= \frac{c(\theta)^{-n_0}e^{-\theta x_0}}{d(n_0, x_0)}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} n_0 &= \alpha - 1 \\ x_0 &= \beta. \end{aligned}$$

3.34 On a

$$f(x|\theta) = \frac{a(x)e^{-\theta x}}{c(\theta)}$$

avec

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$

et

$$\begin{aligned} c(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(x)e^{-\theta x}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2+2\theta x)/2}\,dx \\ &= e^{\theta^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2+2\theta x+\theta^2)/2}\,dx \\ &= e^{\theta^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x+\theta)^2/2}\,dx \\ &= e^{\theta^2/2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x+\theta)^2/2},$$

d'où $S|\Theta = \theta \sim \text{Normale}(-\theta, 1)$. De plus,

$$\begin{aligned}
u(\theta) &\propto c(\theta)^{-n_0} e^{-\theta x_0} \\
&\propto e^{-(\theta^2 n_0 + 2\theta x_0)/2} \\
&\propto \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\theta + \frac{x_0}{n_0})^2}{\frac{1}{n_0}} \right\},
\end{aligned}$$

donc, $\Theta \sim \text{Normale}(-x_0/n_0, 1/n_0)$.

Chapitre 4

4.1 On peut résoudre ce problème de deux façons.

a) De manière similaire à l'exercice 3.10, on trouve la distribution du montant total des sinistres S en considérant la probabilité de ne pas avoir d'accident. En identifiant les femmes par $\theta = 0{,}2$ et les hommes par $\theta = 0{,}4$, on a

$$\Pr[S = x|\Theta = 0{,}2] = \begin{cases} 0{,}8, & x = 0 \\ (0{,}8)(0{,}2) = 0{,}16, & x = 100 \\ (0{,}1)(0{,}2) = 0{,}02, & x = 200 \\ (0{,}1)(0{,}2) = 0{,}02, & x = 400 \end{cases}$$

$$\Pr[S = x|\Theta = 0{,}4] = \begin{cases} 0{,}6, & x = 0 \\ (0{,}8)(0{,}4) = 0{,}32, & x = 100 \\ (0{,}1)(0{,}4) = 0{,}04, & x = 200 \\ (0{,}1)(0{,}4) = 0{,}04, & x = 400 \end{cases}$$

et

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} 0{,}5, & \theta = 0{,}2 \\ 0{,}5, & \theta = 0{,}4. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mu(0{,}2) &= 28 & \sigma^2(0{,}2) &= 4\,816 \\
\mu(0{,}4) &= 56 & \sigma^2(0{,}4) &= 8\,064
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] \\
&= \frac{4\ 816 + 8\ 064}{2} \\
&= 6\ 440 \\
a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] \\
&= \frac{28^2 + 56^2}{2} - \left(\frac{28+56}{2}\right)^2 \\
&= 196,
\end{aligned}$$

d'où le facteur de crédibilité est $z = n/(n + s^2/a) = n/(n + 32{,}86)$.

b) On pose $S = X_1 + \cdots + X_N$ avec $N|\Theta = \theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$,

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} 0{,}5, & \theta = 0{,}2 \\ 0{,}5, & \theta = 0{,}4. \end{cases}$$

et

$$\Pr[X = x] = \begin{cases} 0{,}8, & x = 100 \\ 0{,}1, & x = 200 \\ 0{,}1, & x = 400. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mu(\Theta) &= E[S|\Theta] \\
&= E[N|\Theta]E[X] \\
&= 140\Theta \\
\sigma^2(\Theta) &= \mathrm{Var}[S|\Theta] \\
&= \mathrm{Var}[N|\Theta]E[X]^2 + E[N|\Theta]\mathrm{Var}[X] \\
&= 19\ 600\Theta(1-\Theta) + 8\ 400\Theta \\
&= 28\ 000\Theta - 19\ 600\Theta^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] \\
&= 28\ 000E[\Theta] - 19\ 600E[\Theta^2] \\
&= 28\ 000(0{,}3) - 19\ 600(0{,}1) \\
&= 6\ 440
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] \\
&= 19\,600\mathrm{Var}[\Theta] \\
&= 19\,600(0{,}01) \\
&= 196
\end{aligned}$$

Le facteur de crédibilité est donc $z = n/(n + s^2/a) = n/(n + 32{,}86)$.

4.2 Soit S le nombre de balles rouges tirées et Θ la probabilité de tirer une balle rouge. On identifie par $\theta = 0{,}75$ l'urne A, $\theta = 0{,}50$ l'urne B et $\theta = 0{,}25$ l'urne C. On a le modèle $S|\Theta = \theta \sim \text{Binomiale}(5, \theta)$ et

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \theta = 0{,}75 \\ \frac{3}{6}, & \theta = 0{,}50 \\ \frac{2}{6}, & \theta = 0{,}25. \end{cases}$$

Ainsi, $\mu(\Theta) = E[S|\Theta] = 5\Theta$ et $\sigma^2(\Theta) = \mathrm{Var}[S|\Theta] = 5\Theta(1 - \Theta)$, d'où

$$\begin{aligned}
m &= E[\mu(\Theta)] = 5E[\Theta] = 2{,}2917 \\
s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] = 5(E[\Theta] - E[\Theta^2]) = 1{,}0938
\end{aligned}$$

et

$$a = \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = 25\mathrm{Var}[\Theta] = 0{,}7378.$$

Après une expérience lors de laquelle on a obtenu $\bar{S} = S_1 = 3$, le facteur de crédibilité est $z = 1/(1 + 1{,}0938/0{,}7378) = 0{,}4028$. L'estimateur de Bühlmann du nombre de boules rouges lors du prochain tir dans la même urne est donc

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= 0{,}4028(3) + (1 - 0{,}4028)(2{,}2917) \\
&= 2{,}5770.
\end{aligned}$$

4.3 a) Soit θ_A le niveau de risque de la classe A et θ_B celui de la classe B. Le modèle est le suivant :

$$\Pr[S = x|\Theta = \theta_A] = \begin{cases} 0{,}2, & x = 2 \\ 0{,}8, & x = 0 \end{cases}$$

$$\Pr[S = x|\Theta = \theta_B] = \begin{cases} 0{,}2, & x = c \\ 0{,}8, & x = 0 \end{cases}$$

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \theta = \theta_A \\ \frac{1}{2}, & \theta = \theta_B. \end{cases}$$

b) Avec l'information de a), on a

$$E[S|\Theta=\theta_A]=0{,}4 \qquad \mathrm{Var}[S|\Theta=\theta_A]=0{,}64$$
$$E[S|\Theta=\theta_B]=0{,}2c \qquad \mathrm{Var}[S|\Theta=\theta_B]=0{,}16c^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s^2 &= E[\mathrm{Var}[S|\Theta]] = 0{,}32+0{,}08c^2 \\ a &= \mathrm{Var}[E[S|\Theta]] = 0{,}04-0{,}04c+0{,}01c^2 \end{aligned}$$

et, donc,

$$K=\frac{0{,}32+0{,}08c^2}{0{,}04-0{,}04c+0{,}01c^2}.$$

Comme il n'y a qu'une année d'expérience, le facteur de crédibilité est $z=1/(1+K)$. Or, $\lim_{c\to\infty} K=8$ d'où $\lim_{c\to\infty} z=1/9$.

4.4 On prend θ_1 pour représenter les bons risques, θ_2 les risques moyens et θ_3 les mauvais risques. On a le modèle suivant :

$$\begin{aligned} X|\Theta=\theta_1 &\sim \text{Gamma}(4,2) \\ X|\Theta=\theta_2 &\sim \text{Gamma}(4,1) \\ X|\Theta=\theta_3 &\sim \text{Gamma}(10,2) \end{aligned}$$

et

$$\Pr[\Theta=\theta_i]=\begin{cases} 0{,}25, & i=1 \\ 0{,}60, & i=2 \\ 0{,}15, & i=3. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu(\theta_1) &= 2, & \sigma^2(\theta_1) &= 1 \\ \mu(\theta_2) &= 4, & \sigma^2(\theta_1) &= 4 \\ \mu(\theta_3) &= 5, & \sigma^2(\theta_1) &= 2{,}5 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m &= E[\mu(\Theta)] \\ &= 0{,}25(2)+0{,}60(4)+0{,}15(5)=3{,}65 \\ s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] \\ &= 0{,}25(1)+0{,}60(4)+0{,}15(2{,}5)=3{,}025 \\ a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] \\ &= 0{,}25(2^2)+0{,}60(4^2)+0{,}15(5^2)-m^2=1{,}0275. \end{aligned}$$

Le facteur de crédibilité après deux années est

$$z = \frac{2}{2 + 3{,}025/1{,}0275} = 0{,}4045$$

et, enfin, la prime de Bühlmann pour la troisième année après une expérience individuelle moyenne de $(1+2)/2 = 1{,}5$ est

$$\pi_3 = z(1{,}5) + (1-z)(3{,}65) = 2{,}78.$$

4.5 On a

$$\begin{aligned}
m &= E[\mu(\Theta)] \\
&= \frac{1\,000}{5\,000}(50) + \frac{2\,000}{5\,000}(200) + \frac{1\,000}{5\,000}(500) + \frac{1\,000}{5\,000}(1\,000) \\
&= 390 \\
s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] \\
&= \frac{1\,000}{5\,000}(100\,000) + \frac{2\,000}{5\,000}(500\,000) + \frac{1\,000}{5\,000}(500\,000) + \frac{1\,000}{5\,000}(500\,000) \\
&= 420\,000
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] \\
&= E[\mu(\Theta)^2] - m^2 \\
&= 114\,400.
\end{aligned}$$

Le facteur de crédibilité après quatre ans est donc $z = 4/(4 + 420\,000/114\,400) = 0{,}5214$ et la prime de crédibilité est

$$\pi_5 = (0{,}5214)\left(\frac{800}{4}\right) + (0{,}4786)(390) = 290{,}93.$$

4.6 On prend θ_1 pour représenter les bons risques, θ_2 les risques moyens et θ_3 les mauvais risques. On a donc le modèle suivant :

$$\begin{aligned}
X|\Theta = \theta_1 &\sim \text{Pareto}(4, 1200) \\
X|\Theta = \theta_2 &\sim \text{Gamma}(1000, 2) \\
X|\Theta = \theta_3 &\sim \text{Exponentielle}(0{,}00125)
\end{aligned}$$

et

$$\Pr[\Theta = \theta_i] = \begin{cases} 0{,}3, & i = 1 \\ 0{,}5, & i = 2 \\ 0{,}2, & i = 3. \end{cases}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\mu(\theta_1) &= 400, & \sigma^2(\theta_1) &= 320\,000 \\
\mu(\theta_2) &= 500, & \sigma^2(\theta_1) &= 250 \\
\mu(\theta_3) &= 800, & \sigma^2(\theta_1) &= 640\,000
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
m &= E[\mu(\Theta)] = 530 \\
s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] = 224\,125 \\
a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = 20\,100.
\end{aligned}$$

Le facteur de crédibilité après quatre années d'expérience est donc

$$z = \frac{4}{4 + 224\,125/20\,100} = 0{,}2640.$$

4.7 On a $S|\Theta = \theta \sim \mathrm{Gamma}(5, \theta)$, d'où $\mu(\theta) = 5/\theta$ et $\sigma^2(\theta) = 5/\theta^2 = \mu(\theta)^2/5$. On nous donne la fonction de masse de probabilité de la prime de risque :

$$\Pr[\mu(\Theta) = \mu] = \begin{cases} 0{,}3, & \mu = 2\,500 \\ 0{,}5, & \mu = 4\,000 \\ 0{,}2, & \mu = 5\,000 \end{cases}$$

ou, de manière équivalente,

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} 0{,}3, & \theta = 0{,}002 \\ 0{,}5, & \theta = 0{,}00125 \\ 0{,}2, & \theta = 0{,}001. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
m &= E[\mu(\Theta)] \\
&= 2\,500(0{,}3) + 4\,000(0{,}5) + 5\,000(0{,}2) \\
&= 3\,750, \\
s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] \\
&= \frac{1}{5}\, E[\mu(\Theta)^2] \\
&= \frac{(2\,500)^2(0{,}3) + (4\,000)^2(0{,}5) + (5\,000)^2(0{,}2)}{5} \\
&= 2\,975\,000, \\
a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] \\
&= (2\,500)^2(0{,}3) + (4\,000)^2(0{,}5) + (5\,000^2)(0{,}2) - m^2 \\
&= 812\,500, \\
K &= \frac{s^2}{a} \\
&= 3{,}6615
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\pi_5 &= \frac{4}{4+K}\frac{20\,000}{4} + \frac{K}{4+K}3750 \\
&= 4\,402{,}61.
\end{aligned}$$

4.8 Cas géométrique/bêta avec $\alpha = \beta = 3$. Voir les formules de l'annexe A. La prime bayesienne et la prime de Bühlmann sont égales dans un tel cas.

4.9 Dans tous les cas ci-dessous, le facteur de crédibilité est $z = n/(n+K)$, où $K = s^2/a$, $s^2 = E[\sigma^2(\Theta)]$, $a = \mathrm{Var}[\mu(\Theta)]$ et la prime de crédibilité est $z\bar{S} + (1-z)m$.

a) On a $S|\Theta \sim \text{Bernoulli}(\Theta)$, $\Theta \sim \text{Bêta}(\alpha, \beta)$, d'où $\mu(\Theta) = \Theta$ et $\sigma^2(\Theta) = \Theta(1-\Theta) = \Theta - \Theta^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
m &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\
s^2 &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} \\
a &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)},
\end{aligned}$$

et $K = \alpha + \beta$.

b) On a $S|\Theta \sim \text{Géométrique}(\Theta)$, $\Theta \sim \text{Bêta}(\alpha, \beta)$, d'où $\mu(\Theta) = (1-\Theta)/\Theta$, $\sigma^2(\Theta) = (1-\Theta)/\Theta^2$. Or, il est facile de démontrer que si Θ a une distribution bêta, alors

$$E\left[\frac{(1-\Theta)^j}{\Theta^k}\right] = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-k)\Gamma(\beta+j)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+j-k)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} m &= \frac{\beta}{\alpha-1} \\ s^2 &= \frac{\beta(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \\ a &= \frac{\beta(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \end{aligned}$$

et $K = \alpha - 1$.

c) On a $S|\Theta \sim \text{Gamma}(\tau, \Theta)$, $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, d'où $\mu(\Theta) = \tau/\Theta$ et $\sigma^2(\Theta) = \tau/\Theta^2$. On peut démontrer que

$$E[\Theta^k] = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{\lambda^k}, & k \geq 1 \\ 1, & k = 0 \\ \dfrac{\lambda^{|k|}}{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-|k|)}, & k \leq -1, |k| < \alpha. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} m &= \frac{\tau\lambda}{\alpha-1} \\ s^2 &= \frac{\tau\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \\ a &= \frac{\tau^2\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \end{aligned}$$

et $K = (\alpha-1)/\tau$. On remarque qu'il s'agit d'une généralisation du cas exponentielle/gamma.

d) On a $S|\Theta \sim \text{Binomiale négative}(r, \Theta)$, $\Theta \sim \text{Bêta}(\alpha, \beta)$, d'où $\mu(\Theta) = r(1-\Theta)/\Theta$ et $\sigma^2(\Theta) = r(1-\Theta)/\Theta^2$. En utilisant le résultat trouvé en b), on obtient

$$\begin{aligned} m &= \frac{r\beta}{\alpha-1} \\ s^2 &= \frac{r\beta(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \\ a &= \frac{r^2\beta(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \end{aligned}$$

et $K = (\alpha-1)/r$. On remarque qu'il s'agit de la généralisation du cas géométrique/bêta.

e) On a $S|\Theta \sim \text{Normale}(5\Theta, \sigma^2)$, $\Theta \sim U(a,b)$, d'où $\mu(\Theta) = 5\Theta$ et $\sigma^2(\Theta) = \sigma^2$. Alors

$$\begin{aligned} m &= \frac{5}{2}(a+b) \\ s^2 &= \sigma^2 \\ a &= \frac{25(b-a)^2}{12}, \end{aligned}$$

et

$$K = \frac{12\sigma^2}{25(b-a)^2}.$$

f) On a $S|\Theta \sim \text{Exponentielle}(\Theta)$, $\Theta^{-1} \sim \text{Bêta}(\alpha, \beta)$, d'où $\mu(\Theta) = \Theta^{-1}$ et $\sigma^2(\Theta) = \Theta^{-2}$. Alors

$$\begin{aligned} m &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ s^2 &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} \\ a &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \end{aligned}$$

et

$$K = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+1)}{\beta}.$$

4.10 a) En posant égales à zéro les dérivées partielles de $E[(\mu(\Theta) - \alpha - \beta\bar{X})^2]$ par rapport à α et β, on obtient les équations normales

$$\begin{aligned} E[Y] - \alpha - \beta E[\bar{X}] &= 0 \\ E[Y\bar{X}] - \alpha E[\bar{X}] - \beta E[\bar{X}^2] &= 0. \end{aligned}$$

La solution de ce système d'équation est

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= E[Y] - \hat{\beta} E[\bar{X}] \\ \hat{\beta} &= \frac{\text{Cov}(Y, \bar{X})}{\text{Var}[\bar{X}]}. \end{aligned}$$

b) Premièrement, on a que $\text{Cov}(\mu(\Theta), X_t) = a$. Il en découle directement que $\text{Cov}(\mu(\Theta), \bar{X}) = a$. Deuxièmement,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{X}] &= \text{Var}[E[\bar{X}|\Theta]] + E[\text{Var}[\bar{X}|\Theta]] \\ &= \text{Var}[\mu(\Theta)] + E\left[\frac{\sigma^2(\Theta)}{n}\right] \\ &= a + \frac{s^2}{n}. \end{aligned}$$

c) Dans un contexte de crédibilité, on a que $E[\mu(\Theta)] = E[\bar{X}] = m$, d'où

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{a\,n}{a\,n + s^2} \\ &= z\end{aligned}$$

et $\alpha = (1-z)m$. Cet exercice illustre deux choses : 1) que la prime de Bühlmann minimise l'espérance en c), où l'on suppose déjà un poids égal donné à chaque contrat, et 2) que la seule réelle différence entre la théorie de la crédibilité et les modèles statistiques usuels réside dans la structure de covariance.

4.11 On a (en laissant tomber les indices i) : $X|\Theta \sim$ Binomiale négative$(\Theta, 0{,}4)$ et $\mu(\Theta) \sim$ Exponentielle(5). Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mu(\Theta) &= \Theta\left(\frac{1-0{,}4}{0{,}4}\right) \\ &= 1{,}5\Theta\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma^2(\Theta) &= \Theta\left(\frac{1-0{,}4}{0{,}4^2}\right) \\ &= 3{,}75\Theta \\ &= 2{,}5\mu(\Theta).\end{aligned}$$

On remarque qu'il est simple, ici, de trouver la distribution de Θ. En effet, $\mu(\Theta) = 1{,}5\Theta \sim$ Exponentielle(5), d'où $\Theta \sim$ Exponentielle$(7{,}5)$. Cela dit, sans même cette information, on trouve $s^2 = E[\sigma^2(\Theta)] = 2{,}5E[\mu(\Theta)] = 0{,}5$ et $a = \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = 0{,}04$, d'où $K = 25/2$ et $z = 1/(1+25/2) = 0{,}0741$.

4.12 Soit N le nombre de sinistres. On a $N|\Theta = \theta \sim$ Poisson(Θ), $E[N|\Theta] = \Theta \sim U(0{,}1, 0{,}3)$ et donc

$$\begin{aligned}m &= E[\mu(\Theta)] = E[\Theta] = 0{,}2 \\ s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] = E[\Theta] = 0{,}2 \\ a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = \mathrm{Var}[\Theta] = \frac{1}{300}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $K = s^2/a = 60$ et

$$\pi_6 = \left(\frac{5}{5+60}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{60}{5+60}\right)(0{,}2) = 0{,}2308.$$

4.13 On a $X|\Theta \sim N(\Theta, 4\Theta^2)$ avec $\mu(\Theta) = \Theta$ et $\sigma^2(\Theta) = 4\Theta^2$, d'où $\sigma^2(\Theta)/\mu(\Theta) = 4\Theta \sim U(0, 40)$ et donc $\Theta \sim U(0, 10)$. Ainsi, $m = E[\Theta] = 5$, $s^2 = E[4\Theta^2] =$

$4(\mathrm{Var}[\Theta] + E[\Theta]^2) = 1{,}600/12$ et $a = \mathrm{Var}[\Theta] = 100/12$, d'où $K = s^2/a = 16$ et, finalement,

$$\pi_5 = \left(\frac{4}{4+16}\right)\left(\frac{12}{4}\right) + \left(1 - \frac{4}{4+16}\right)(5) = 4{,}6.$$

4.14 a) $S|\Theta = \theta \sim \text{Poisson}(\theta)$. On a donc $\mu(\Theta) = \Theta$, $\sigma^2(\Theta) = \Theta$,

$$\begin{aligned} m &= E[\mu(\Theta)] = E[\Theta] = \frac{\alpha}{\lambda} \\ s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] = E[\Theta] = \frac{\alpha}{\lambda} \\ a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = \mathrm{Var}[\Theta] = \frac{\alpha}{\lambda^2} \end{aligned}$$

et donc $z = n/(n+\lambda)$. Dans tous les cas ci-dessous, $m = 2$ et $\bar{S} = (3+1+5+4+2)/5 = 3$.

i) Si $\Theta \sim \text{Gamma}(10,5)$, alors $z = 1/2$ et $\pi_6 = 2{,}5$.

ii) Si $\Theta \sim \text{Gamma}(50,25)$, alors $z = 1/6$ et $\pi_6 = 2{,}17$.

iii) Si $\Theta \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, alors $z = 20/21$ et $\pi_6 = 2{,}95$.

b) $S|\Theta = \theta \sim U(0,2\theta)$. On a donc $\mu(\Theta) = \Theta$, $\sigma^2(\Theta) = \Theta^2/3$,

$$\begin{aligned} m &= E[\mu(\Theta)] = E[\Theta] = \frac{\alpha}{\lambda} \\ s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] = \frac{E[\Theta^2]}{3} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{3\lambda^2} \\ a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = \mathrm{Var}[\Theta] = \frac{\alpha}{\lambda^2} \end{aligned}$$

et donc $z = (3n)/(3n+\alpha+1)$. Dans tous les cas ci-dessous, $m = 2$ et $\bar{S} = (3+1+5+4+2)/5 = 3$.

i) Si $\Theta \sim \text{Gamma}(10,5)$, alors $z = 15/26$ et $\pi_6 = 2{,}58$.

ii) Si $\Theta \sim \text{Gamma}(50,25)$, alors $z = 15/66$ et $\pi_6 = 2{,}23$.

iii) Si $\Theta \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, alors $z = 30/33$ et $\pi_6 = 2{,}91$.

4.15 On a

$$\begin{aligned} s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] \\ &= E[\Theta^2] \\ &= 4\ 500 + 150^2 \\ &= 27\ 000 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] \\ &= \mathrm{Var}[\Theta] \\ &= 4\ 500, \end{aligned}$$

d'où $z = 4/(4 + 27\,000/4\,500) = 0{,}4$ et $\pi_5 = (0{,}4)(100 + 125 + 75 + 120)/4 + (0{,}6)(150) = 132$.

4.16 On a $\mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] + E[\sigma^2(\Theta)] = a + s^2$. Pour le portefeuille A, $a = 0{,}25\,\mathrm{Var}[S]$, d'où $s^2 = 0{,}75\,\mathrm{Var}[S]$ et

$$K_A = \frac{0{,}75}{0{,}25} = 3.$$

Pour le portefeuille B, $S \sim N(\mu, 25)$ et $\mu(\Theta) \sim N(\alpha, 16)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = 16 \\ s^2 &= \mathrm{Var}[S] - \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = 25 - 16 = 9 \end{aligned}$$

et

$$K_B = \frac{9}{16}.$$

Puisque $K_B < K_A$, une plus grande crédibilité est accordée au portefeuille B.

4.17 a) On a $\mu(\Theta) = \Theta$ et $\sigma^2(\Theta) = \Theta$. Par conséquent,

$$\Pr[\mu(\Theta) > 5] = \Pr[\Theta > 5] = e^{-5\lambda} = e^{-10},$$

d'où $\lambda = 2$. On sait que dans le modèle Poisson/gamma, la constante de crédibilité est $K = \lambda = 2$.

b) On a $\mu(\Theta_1, \Theta_2) = E[S_1|\Theta_1] + E[S_2|\Theta_2] = \Theta_1 + \Theta_2$ et $\sigma^2(\Theta_1, \Theta_2) = \mathrm{Var}[S_1|\Theta_1] + \mathrm{Var}[S_2|\Theta_2] = \Theta_1 + \Theta_2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} s^2 &= E[\sigma^2(\Theta_1, \Theta_2)] \\ &= E[\Theta_1] + E[\Theta_2] \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta_1, \Theta_2)] \\ &= \mathrm{Var}[\Theta_1] + \mathrm{Var}[\Theta_2] \\ &= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$K = \frac{\alpha\lambda(\alpha + \lambda)}{\alpha^2 + \lambda^2}.$$

4.18 On nous donne les informations suivantes : $\pi_{n+1} = 110$, $\pi_{n+2} = 125$, $\bar{S}_n = 125$, $\bar{S}_{n+1} = 150$ et $\mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = 0{,}25\,\mathrm{Var}[S]$. Tout d'abord, on a $E[\sigma^2(\Theta)] = 0{,}75\,\mathrm{Var}[S]$, d'où la constante de crédibilité est $K = 3$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 110 &= z_n \bar{S}_n + (1 - z_n) m \\ &= \left(\frac{n}{n+3}\right)(125) + \left(\frac{3}{n+3}\right) m \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 125 &= z_{n+1} \bar{S}_{n+1} + (1 - z_{n+1}) m \\ &= \left(\frac{n+1}{n+1+3}\right)(150) + \left(\frac{3}{n+1+3}\right) m. \end{aligned}$$

En résolvant le système d'équations on trouve $n = 2$ et $m = 100$. Par conséquent, la prime de crédibilité d'un assuré ayant encouru 500 $ de sinistres en $n = 2$ années est

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \frac{2}{5}\left(\frac{500}{2}\right) + \frac{3}{5}(100) \\ &= 160. \end{aligned}$$

4.19 On a $\mu(\Theta) \sim \text{Gamma}(6, 4)$ et $\sigma^2(\Theta) = \mu(\Theta)^2$, d'où

$$\begin{aligned} m &= E[\mu(\Theta)] = 1{,}5 \\ s^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] \\ &= E[\mu(\Theta)^2] = \frac{21}{8} \\ a &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

et

$$K = \frac{s^2}{a} = 7.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} &= \frac{n}{n+7}\,\bar{S} + \frac{7}{n+7}\,(1{,}5) \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{n} S_t + 10{,}5}{n+7} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} a_{2,3} &= 1{,}50 & a_{3,5} &= 1{,}55 \\ a_{2,2} &= 1{,}39 & a_{4,4} &= 1{,}32 \\ a_{2,4} &= 1{,}61 & a_{3,6} &= 1{,}65. \end{aligned}$$

Les énoncés I et III sont donc vrais.

4.20 On reconnait dans $u(\theta)$ la fonction de densité de probabilité d'une loi gamma de paramètres $\alpha = 3$ et $\lambda = 4$ (d'où $c = 4^3/\Gamma(3) = 32$). On a donc un modèle Poisson/gamma pour lequel on retrouve toutes les formules pertinentes à l'annexe A.

a) On a $m = \alpha/\lambda = 0{,}75$.

b) La prime de crédibilité est égale à la prime bayesienne, soit

$$\begin{aligned}\pi_{n+1} &= \frac{\alpha + \sum_{t=1}^{n} S_t}{n+\lambda} \\ &= \frac{3 + \sum_{t=1}^{n} S_t}{n+4}.\end{aligned}$$

Avec $S_1 = 4$, $S_2 = 1$ et $S_3 = 3$, on a donc $\pi_2 = 7/5 = 1{,}4$, $\pi_3 = 8/6 = 1{,}33$ et $\pi_4 = 11/7 = 1{,}57$.

4.21 On a $S|\Theta \sim \text{Exponentielle}(\Theta)$ et $\mu(\Theta) = \Theta^{-1} \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ tel que $\alpha/\lambda = 4$ et $\alpha/\lambda^2 = 8$. Or,

$$\begin{aligned}m &= E[\Theta^{-1}] = \frac{\alpha}{\lambda} = 4 \\ s^2 &= E[\Theta^{-2}] = \text{Var}[\Theta^{-1}] + E[\Theta^{-1}]^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = 24\end{aligned}$$

et

$$a = \text{Var}[\Theta^{-1}] = 8$$

donnent $K = s^2/a = 3$, d'où le facteur de crédibilité après 2 ans est $z = 2/5 = 0{,}4$. La prime de Bühlmann est donc $0{,}4[(1+3)/2] + 0{,}6(4) = 3{,}2$.

4.22 Premièrement,

$$\pi_n = \frac{1}{n-1+K} \sum_{t=1}^{n-1} S_t + \frac{K}{n-1+K} m.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\pi_{n+1} &= \frac{1}{n+K} \sum_{t=1}^{n} S_t + \frac{K}{n+K} m \\ &= \frac{1}{n+K} \left(\sum_{t=1}^{n-1} S_t + S_n \right) + \frac{K}{n+K} m \\ &= \frac{n-1+K}{n+K} \left(\frac{1}{n-1+K} \sum_{t=1}^{n-1} S_t + \frac{K}{n-1+K} m \right) + \frac{1}{n+K} S_n \\ &= \zeta_n \pi_n + (1-\zeta_n) S_n,\end{aligned}$$

avec $\zeta_n = (n-1+K)/(n+K)$.

4.23 Soit

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{I(n-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{n} (S_{it} - \bar{S}_i)^2.$$

On veut démontrer que $E[\hat{s}^2] = s^2$ sans conditionner sur Θ_i. Le problème se réduit au calcul de $E[(S_{it} - \bar{S}_i)^2]$. Puisque $E[S_{it}] = E[\bar{S}_i]$, on a

$$E[(S_{it} - \bar{S}_i)^2] = \mathrm{Var}[S_{it}] + \mathrm{Var}[\bar{S}_i] - 2\mathrm{Cov}(S_{it}, \bar{S}_i).$$

Or, on sait que, par hypothèse dans le modèle de Bühlmann,

$$\mathrm{Cov}(S_{it}, S_{iu}) = a + \delta_{tu} s^2.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(S_{it}, \bar{S}_i) &= \frac{1}{n} \sum_{u=1}^{n} \mathrm{Cov}(S_{it}, S_{iu}) \\
&= a + \frac{s^2}{n} \\
\mathrm{Var}[\bar{S}_i] &= \mathrm{Cov}(\bar{S}_i, \bar{S}_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{u=1}^{n} \mathrm{Cov}(S_{it}, \bar{S}_i) \\
&= a + \frac{s^2}{n}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S_{it}] &= \mathrm{Cov}(S_{it}, S_{it}) \\
&= a + s^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$E[(S_{it} - \bar{S}_i)^2] = \frac{n-1}{n} s^2,$$

d'où $E[\hat{s}^2] = s^2$.

4.24 On se contente, ici, de donner des pistes de solutions. Afin de respecter la seconde exigence, on pose

$$S_{it} = Y_{it1} + \cdots + Y_{itN_{it}},$$

où Y_{itu} est le montant individuel du sinistre u de la période t du contrat i et N_{it} est le nombre total de sinistres du contrat i dans la période t. Il s'agit, par la suite, de déterminer des modèles de simulation pour Y_{itu} et N_{it} tel que $E[S_{it}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$ et $\mathrm{Var}[S_{it}|\Theta_i] = \sigma^2(\Theta_i)$. Comme il est raisonnable de supposer que les contrats se distinguent davantage par leur fréquence de sinistres que par la sévérité de ceux-ci, le modèle pour la simulation de N_{it} dépendra de la variable aléatoire Θ_i. Autrement dit, on aura un modèle de simulation pour $N_{it}|\Theta_i = \theta_i$ et un autre pour Θ_i.

4.25 On a

$$\begin{aligned}
\hat{s}^2 &= \frac{1}{I(n-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} (S_{ij} - \bar{S}_i)^2 \\
&= \frac{1}{(3)(5)} [(1+1+1+1) + (1+1+4+1+1) + (1+1+1+1)] \\
&= \frac{16}{15} \\
\hat{a} &= \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\bar{S}_i - \bar{S})^2 - \frac{\hat{s}^2}{n} \\
&= \frac{1}{2}[1+1] - \frac{16/15}{6} \\
&= \frac{74}{90},
\end{aligned}$$

d'où $K = 48/37$ et $\hat{z} = 0{,}8222$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\pi_{(1,7)} &= (0{,}8222)(1) + (0{,}1778)(2) = 1{,}1778 \\
\pi_{(2,7)} &= (0{,}8222)(3) + (0{,}1778)(2) = 2{,}8222 \\
\pi_{(3,7)} &= 2.
\end{aligned}$$

Chapitre 5

5.1 Premièrement, on sait que $\mathrm{Cov}(X_{it}, X_{iw}) = a + s^2/w_{i\Sigma}$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{iw}) &= \sum_{t=1}^{n} \frac{w_{it}}{w_{i\Sigma}} \mathrm{Cov}(X_{it}, X_{iw}) \\
&= \sum_{t=1}^{n} \frac{w_{it}}{w_{i\Sigma}} \left(a + \frac{s^2}{w_{i\Sigma}} \right) = a + \frac{s^2}{w_{i\Sigma}} = \frac{a}{z_i}.
\end{aligned}$$

On a, par indépendance des contrats, que $\mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{kw}) = 0$, $k \neq i$.

a) Ici,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{ww}) &= \sum_{k=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{kw}) \\
&= \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{iw}) = a\frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}}.
\end{aligned}$$

b) En utilisant le résultat obtenu en (a),

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}[X_{ww}] &= \operatorname{Cov}(X_{ww}, X_{ww}) \\
&= \sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \operatorname{Cov}(X_{iw}, X_{ww}) \\
&= \sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \left(a \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) \\
&= a \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \right)^2 + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}}.
\end{aligned}$$

c) Premièrement,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_{iw}, X_{zw}) &= \sum_{k=1}^{I} \frac{z_k}{z_\Sigma} \operatorname{Cov}(X_{iw}, X_{kw}) \\
&= \frac{z_i}{z_\Sigma} \operatorname{Cov}(X_{iw}, X_{iw}) = \frac{a}{z_\Sigma}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}[X_{zw}] &= \operatorname{Cov}(X_{zw}, X_{zw}) \\
&= \sum_{i=1}^{I} \frac{z_i}{z_\Sigma} \operatorname{Cov}(X_{iw}, X_{zw}) \\
&= \sum_{i=1}^{I} \frac{z_i}{z_\Sigma} \frac{a}{z_\Sigma} = \frac{a}{z_\Sigma}.
\end{aligned}$$

5.2 On calcule d'abord l'espérance de la variable aléatoire $(X_{it} - X_{iw})^2$. En utilisant les résultats du problème 5.1, on a que

$$\begin{aligned}
E[(X_{it} - X_{iw})^2] &= \operatorname{Var}[X_{it}] + \operatorname{Var}[X_{iw}] - 2\operatorname{Cov}(X_{it}, X_{iw}) \\
&= a + \frac{s^2}{w_{it}} + a + \frac{s^2}{w_{i\Sigma}} - 2\left(a + \frac{s^2}{w_{i\Sigma}} \right) \\
&= \frac{s^2}{w_{it}} - \frac{s^2}{w_{i\Sigma}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{n} w_{it} (X_{it} - X_{iw})^2 \right] &= \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{n} w_{it} E[(X_{it} - X_{iw})^2] \\
&= (In - I) s^2,
\end{aligned}$$

d'où $E[\hat{s}^2] = s^2$.

5.3 En premier lieu, on a que

$$\begin{aligned}
E[(X_{iw} - X_{ww})^2] &= \mathrm{Var}[X_{iw}] + \mathrm{Var}[X_{ww}] - 2\,\mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{ww}) \\
&= a + \frac{s^2}{w_{i\Sigma}} + a \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \right)^2 + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}} - 2 \left(a \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) \\
&= a \left(1 - 2\,\frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} + \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \right)^2 \right) + s^2 \left(\frac{1}{w_{i\Sigma}} - \frac{1}{w_{\Sigma\Sigma}} \right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{I} w_{i\Sigma} (X_{iw} - X_{ww})^2 \right] &= a \sum_{i=1}^{I} \left(w_{i\Sigma} - 2\,\frac{w_{i\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}} + w_{i\Sigma} \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \right)^2 \right) \\
&\quad + (I-1)s^2 \\
&= a \left(w_{\Sigma\Sigma} - \frac{\sum_{i=1}^{I} w_{i\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) + (I-1)s^2 \\
&= a \left(\frac{w_{\Sigma\Sigma}^2 - \sum_{i=1}^{I} w_{i\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) + (I-1)s^2.
\end{aligned}$$

Puisque $E[\hat{s}^2] = s^2$, on a donc que

$$\hat{a} = \frac{w_{\Sigma\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}^2 - \sum_{i=1}^{I} w_{i\Sigma}^2} \left(\sum_{i=1}^{I} w_{i\Sigma} (X_{iw} - X_{ww})^2 - (I-1)\hat{s}^2 \right)$$

est un estimateur sans biais du paramètre a.

5.4 On a

$$\begin{aligned}
E[(X_{iw} - X_{zw})^2] &= \mathrm{Var}[X_{iw}] + \mathrm{Var}[X_{zw}] - 2\,\mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{zw}) \\
&= \frac{a}{z_i} + \frac{a}{z_\Sigma} - 2\frac{a}{z_\Sigma} \\
&= \frac{a}{z_i} - \frac{a}{z_\Sigma}
\end{aligned}$$

et, donc,

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{I} z_i (X_{iw} - X_{zw})^2 \right] &= \sum_{i=1}^{I} z_i E[(X_{iw} - X_{zw})^2] \\
&= (I-1)a,
\end{aligned}$$

d'où $E[\tilde{a}] = a$.

5.5 Si $w_{it} = w$ pour tout i et t, alors $X_{iw} = \bar{X}_i$, $X_{zw} = \bar{X}$ et $z_i = z = an/(an + s^2)$. Par conséquent, $\tilde{a}$ est la solution de

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} \frac{an}{an+s^2} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 \\ an + s^2 &= \frac{n}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 \\ a &= \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{s^2}{n}, \end{aligned}$$

soit $\tilde{a} = \hat{a}$.

5.6 Puisque $\lim_{a \to 0} z_i = 0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0} X_{zw} &= \lim_{a \to 0} \sum_{i=1}^{I} \frac{z_i}{z_\Sigma} X_{iw} \\ &= \left[\frac{0}{0} \right], \end{aligned}$$

une indétermination. Or, puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} z_i &= \frac{\partial}{\partial a} \frac{a w_{i\Sigma}}{a w_{i\Sigma} + s^2} \\ &= \frac{w_{i\Sigma}(a w_{i\Sigma} + s^2) - a w_{i\Sigma}^2}{(a w_{i\Sigma} + s^2)^2}, \end{aligned}$$

alors, par une simple application de la règle de l'Hôpital, on trouve que

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0} X_{zw} &= \sum_{i=1}^{I} \frac{s^2 w_{i\Sigma}}{\sum_{i=1}^{I} s^2 w_{i\Sigma}} X_{iw} \\ &= \sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} X_{iw} \\ &= X_{ww}. \end{aligned}$$

5.7 La façon la plus simple de simuler des ratios consiste à simuler des montants totaux de sinistres S_{it} et à poser

$$X_{it} = \frac{S_{it}}{w_{it}}.$$

Pour la simulation des variables S_{it}, se reporter à la solution de l'exercice 4.24. Il faut toutefois ajouter les poids au modèle de simulation. Puisque la taille des contrats a une influence sur leur nombre de sinistres et non sur le montant de ceux-ci, on intégrera les poids w_{it} au modèle de simulation de $N_{it}|\Theta_i = \theta_i$.

5.8 On nous donne des montants totaux de sinistres. Il faut convertir ces données en ratios pour pouvoir utiliser le modèle de Bühlmann–Straub. En définissant $X_{it} = S_{it}/w_{it}$, on obtient les nouvelles données suivantes :

X_{it}

	Année			
Employeur	1	2	3	4
1	7	7	3	6
2	1	0	4	3
3	1	0	1	2

w_{it}

	Année			
Employeur	1	2	3	4
1	2	3	4	3
2	4	2	1	2
3	3	3	1	3

On a alors :

$$w_{1\Sigma} = 12 \qquad X_{1w} = 5{,}4167$$
$$w_{2\Sigma} = 9 \qquad X_{2w} = 1{,}5556$$
$$w_{3\Sigma} = 10$$
$$X_{3w} = 1$$

et

$$w_{\Sigma\Sigma} = 31 \qquad X_{ww} = 2{,}8710.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\hat{s}^2 &= \frac{1}{12-3}(36{,}9167 + 16{,}2222 + 6)\\ &= 6{,}5710\\ \hat{a} &= \frac{31}{961-325}(128{,}3460 - (2)(6{,}5710))\\ &= 5{,}6153\end{aligned}$$

et $\hat{K} = \hat{s}^2/\hat{a} = 1{,}1700$. Ainsi,

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{12}{13{,}1700} = 0{,}9112\\ z_2 &= \frac{9}{10{,}1700} = 0{,}8850\\ z_3 &= \frac{10}{11{,}1700} = 0{,}8953\end{aligned}$$

et $X_{zw} = 2{,}6779$. Enfin,

$$\begin{aligned}\hat{X}_{1,5} &= z_1 X_{1w} + (1 - z_1) X_{zw}\\ &= 5{,}1735\end{aligned}$$

et pour trois unités de masse salariale, la prime totale payée par l'employeur est 15,52.

5.9 a) Il faut utiliser la formule de $\hat{s}^2$ pour données manquantes. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} w_{1\Sigma} &= 3 & X_{1w} &= 4 \\ w_{2\Sigma} &= 10 & X_{2w} &= 8 \\ w_{3\Sigma} &= 12 & X_{3w} &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

et

$$w_{\Sigma\Sigma} = 25 \qquad X_{ww} = 5.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \hat{s}^2 &= \frac{1}{12-3}\left[(1)(1+1) + (2)(4+36+16) + (3)\left(\frac{9}{16} + \frac{121}{16} + \frac{1}{16} + \frac{169}{16}\right)\right] \\ &= 18{,}9167, \\ \hat{a} &= \frac{25}{625-253}\left[(3)(1) + (10)(9) + (12)\left(\frac{81}{16}\right) - (2)(18{,}9167)\right] \\ &= 7{,}7901 \end{aligned}$$

et $\hat{K} = \hat{s}^2/\hat{a} = 2{,}4283$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \hat{z}_1 &= \frac{3}{5{,}4283} = 0{,}5527 \\ \hat{z}_2 &= \frac{10}{12{,}4283} = 0{,}8046 \\ \hat{z}_3 &= \frac{12}{14{,}4283} = 0{,}8317 \end{aligned}$$

et $X_{zw} = 4{,}9954$. Enfin,

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{1,6} &= \hat{z}_1 X_{1w} + (1-\hat{z}_1)X_{zw} \\ &= 4{,}4453 \\ \hat{\pi}_{2,6} &= \hat{z}_2 X_{2w} + (1-\hat{z}_2)X_{zw} \\ &= 7{,}4129 \\ \hat{\pi}_{3,6} &= \hat{z}_3 X_{3w} + (1-\hat{z}_3)X_{zw} \\ &= 3{,}1279. \end{aligned}$$

b) La fonction `cm` permet de choisir entre l'estimateur sans biais $\hat{a}$ et l'estimateur itératif $\tilde{a}$. Pour utiliser `cm`, il faut d'abord placer les données dans une matrice ou un *data frame* avec une colonne d'étiquettes pour les contrats :

```
> db <- cbind(contrat = 1:3, matrix(c(3, 6, NA,
+     5, 8, 2, NA, 8, 0, NA, 14, 3, 4, 4, 6), nrow = 3,
+     dimnames = list(NULL, paste("r", 1:5, sep = "."))),
+     matrix(c(1, 2, NA, 1:3, NA, 2, 3, NA, 2, 3,
+         1:3), nrow = 3, dimnames = list(NULL,
+         paste("w", 1:5, sep = "."))))
> db
```

```
     contrat r.1 r.2 r.3 r.4 r.5 w.1 w.2 w.3 w.4 w.5
[1,]       1   3   5  NA  NA   4   1   1  NA  NA   1
[2,]       2   6   8   8  14   4   2   2   2   2   2
[3,]       3  NA   2   0   3   6  NA   3   3   3   3
```

Pour vérifier les réponses de la partie a), on fera

```
> library("actuar")
> res <- cm(~contrat, db, ratios = r.1:r.5, weights = w.1:w.5,
+     method = "Buhlmann-Gisler")
> summary(res)
```

```
Call:
cm(formula = ~contrat, data = db, ratios = r.1:r.5, weights = w.1:w.5,
    method = "Buhlmann-Gisler")

Structure Parameters Estimators

  Collective premium: 4.99537

  Between contrat variance: 7.790099
  Within contrat variance: 18.91667

Detailed premiums

  Level: contrat
    contrat Indiv. mean Weight Cred. factor Cred. premium
    1       4.00         3     0.5526596    4.445269
    2       8.00        10     0.8046155    7.412942
    3       2.75        12     0.8316990    3.127898
```

Pour utiliser plutôt l'estimateur $\tilde{a}$ du paramètre a, on fait :

```
> res <- cm(~contrat, db, ratios = r.1:r.5, weights = w.1:w.5,
+     method = "iterative")
> summary(res)
```

```
Call:
cm(formula = ~contrat, data = db, ratios = r.1:r.5, weights = w.1:w.5,
    method = "iterative")

Structure Parameters Estimators

  Collective premium: 5.008418

  Between contrat variance: 5.565321
```

```
  Within contrat variance: 18.91667

Detailed premiums

  Level: contrat
    contrat Indiv. mean Weight Cred. factor Cred. premium
    1       4.00         3     0.4688214    4.535650
    2       8.00        10     0.7463229    7.241104
    3       2.75        12     0.7792701    3.248500
```

Évidemment, les réponses sont alors différentes de celles obtenues en a).

5.10 On a $z_1 = 8/23$, $z_2 = 6/21$, $z_4 = 9/24$ et

$$\begin{aligned} X_{zw} &= \sum_{i=1}^{4} \frac{z_i}{z_\Sigma} X_{iw} \\ &= \frac{\frac{8}{23}(0{,}89) + \frac{6}{21}(0{,}85) + \frac{9}{24}(0{,}7) + z_3(0{,}65)}{\frac{8}{23} + \frac{6}{21} + \frac{9}{24} + z_3} \\ &= 0{,}8. \end{aligned}$$

On trouve donc $z_3 = 0{,}0539$.

Bibliographie

Bailey, A. L. 1945, «A generalized theory of credibility», *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 32, p. 13–20.

Bailey, A. L. 1950, «Credibility procedures, Laplace's generalization of Bayes' rule and the combination of collateral knowledge with observed data», *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 37, p. 7–23.

Bühlmann, H. et E. Straub. 1970, «Glaubgwürdigkeit für Schadensätze», *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, vol. 70, p. 111–133.

De Vylder, F. 1976a, «Geometrical credibility», *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1976, p. 121–149.

De Vylder, F. 1976b, «Optimal semilinear credibility», *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, vol. 76, p. 27–40.

De Vylder, F. 1978, «Parameter estimation in credibility theory», *ASTIN Bulletin*, vol. 10, p. 99–112.

De Vylder, F. 1981, «Practical credibility theory with emphasis on parameter estimation», *ASTIN Bulletin*, vol. 12, p. 115–131.

De Vylder, F. 1984, «Practical models in credibility theory, including parameter estimation», dans *Premium calculation in insurance, NATO ASI series ; Series C, Mathematical and physical sciences*, vol. 121, édité par F. De Vylder, M. Goovaerts et J. Haezendonck, D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, p. 133–150.

De Vylder, F. 1985, «Non-linear regression in credibility theory», *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 4, p. 163–172.

De Vylder, F. et M. J. Goovaerts. 1991, «Estimation of the heterogeneity parameter in the Bühlmann–Straub credibility theory model», *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 10, p. 233–238.

De Vylder, F. et M. J. Goovaerts. 1992a, «Optimal parameter estimation under zero-excess assumptions in a classical model», *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 11, p. 1–6.

De Vylder, F. et M. J. Goovaerts. 1992b, «Optimal parameter estimation under zero-excess assumptions in the Bühlmann–Straub model», *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 11, p. 167–171.

Dubey, A. et A. Gisler. 1981, «On parameter estimation in credibility», *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, vol. 81, p. 187–211.

Dutang, C., V. Goulet et M. Pigeon. 2008, «**actuar**: An R package for actuarial science», *Journal of Statistical Software*, vol. 25, nº 7. URL http://www.jstatsoft.org/v25/i07.

Fisher, A. 1919, «The theory of experience rating: Discussion», *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 5, p. 139–145.

Gerber, H. U. et D. A. Jones. 1975, «Credibility formulas of the updating type», *Transaction of the Society of Actuaries*, vol. 27, p. 31–46.

Gisler, A. 1980, «Optimal trimming of data in the credibility model», *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, vol. 80, p. 313–325.

Gisler, A. et P. Reinhard. 1993, «Robust credibility», *ASTIN Bulletin*, vol. 23, p. 117–143.

Goovaerts, M. J. et W. J. Hoogstad. 1987, *Credibility Theory*, nº 4 dans Surveys of actuarial studies, Nationale-Nederlanden N.V., Netherlands.

Goovaerts, M. J., R. Kaas, A. E. van Heerwaarden et T. Bauwelinckx. 1990, *Effective Actuarial Methods*, North-Holland, Amsterdam, ISBN 0-4448839-9-1.

Goulet, V. 1994, *Théorie de la crédibilité : histoire, principes et applications*, mémoire de maîtrise, Université Laval.

Hachemeister, C. A. 1975, «Credibility for regression models with application to trend», dans *Credibility, theory and applications*, Proceedings of the Berkeley actuarial research conference on credibility, Academic Press, New York, p. 129–163.

Jewell, W. S. 1974, «Credible means are exact bayesian for exponential families», *ASTIN Bulletin*, vol. 8, p. 77–90.

Jewell, W. S. 1975, «The use of collateral data in credibility theory: A hierarchical model», *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, vol. 38, p. 1–16.

Keffer, R. 1929, «An experience rating formula», *Transactions of the Actuarial Society of America*, vol. 30, p. 130–139.

Klugman, S. A., H. H. Panjer et G. Willmot. 2004, *Loss Models: From Data to Decisions*, 2ᵉ éd., Wiley, New York, ISBN 0-4712157-7-5.

Klugman, S. A., H. H. Panjer et G. Willmot. 2008, *Loss Models: From Data to Decisions*, 3e éd., Wiley, New York, ISBN 978-0-470-18781-4.

Künsch, H. R. 1992, «Robust methods for credibility», *ASTIN Bulletin*, vol. 22, p. 33–49.

Mayerson, A. L. 1964, «A bayesian view of credibility», *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 51, p. 85–104.

Mowbray, A. H. 1914, «How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium?», *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 1, p. 25–30.

Neyman, J. 1962, «Two breakthroughs in the theory of statistical decision making», *Revue de l'Institut International de Statistique*, vol. 30, p. 11–27.

Norberg, R. 1979, «The credibility approach to ratemaking», *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1979, p. 181–221.

Norberg, R. 1980, «Empirical Bayes credibility», *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1980, p. 177–194.

Robbins, H. 1955, «An empirical Bayes approach to statistics», dans *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. 30, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, p. 157–163.

Robbins, H. 1964, «An empirical Bayes approach to statistics», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 30, p. 1–20.

Russell, B. 1948, *Human Knowledge, Its Scope and Limits*, G. Allen and Unwin, London.

Savage, L. J. 1954, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York.

Taylor, G. C. 1977, «Abstract credibility», *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1977, p. 149–168.

Whitney, A. W. 1918, «The theory of experience rating», *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 4, p. 275–293.

Zehnwirth, B. 1991, «Credibility (Rough study guide)», Notes d'une conférence prononcée lors du 1991 CAS Seminar on Ratemaking.

9 782980 913693